

Zbigniew Świtalski

RELACJE STOPNIOWALNE
I PRZEDZIAŁOWE
W MODELOWANIU PREFERENCJI

WIRTUALNE SEMINARIUM Z BADAŃ OPERACYJNYCH

12.12.2022

PLAN PREZENTACJI

- Modele preferencji
- Subiektywizm i nieokreśloność
- Preferencje stopniowalne i przedziałowe jako narzędzie analizy decyzyjnej
- Zgodność dla relacji stopniowalnych i przedziałowych
- Wskaźniki zgodności
- Eksperyment z udziałem rzeczywistych decydentów

PREFERENCJE W EKONOMII I TEORII DECYZJI

- Teoria konsumenta (preferencje konsumenta)
- Teoria wyboru społecznego (preferencje głosujących)
- Systemy wspomaganie decyzji

MODELE PREFERENCJI I ICH RODZAJE

- Modele relacyjne
- Modele funkcji użyteczności
- Modele funkcji wyboru

CELE MODELOWANIA PREFERENCJI

- Cel opisowy
- Cel prognostyczny
- Cel normatywny

SUBIEKTYWIZM I NIEOKREŚLONOŚĆ

- Naturalny subiektywizm preferencji
- Subiektywizm wynikający z błędów poznawczych (zniekształcenie rzeczywistości, emocje, różne efekty psychologiczne)
- Naturalna nieokreśloność preferencji

CELE ANALIZY DECYZYJNEJ

- Rozeznanie się decydenta w sytuacji decyzyjnej
- Lepsze zrozumienie konfliktu wartości, który musi rozwiązać decydet przy podejmowaniu decyzji
- Próba wyjaśnienia sprzeczności zawartych w deklarowanych przez decydenta preferencjach

Keeney R.L., Raiffa M., *Decisions with Multiple Objectives. Preferences and Value Tradeoffs*, New York 1976.

Roy B., *Wielokryterialne wspomaganie decyzji*, Warszawa 1990.

PREFERENCJE STOPNIOWALNE I PRZEDZIAŁOWE JAKO NARZĘDZIE ANALIZY DECYZYJNEJ

- Porównywanie parami
- Uwzględnienie stopniowości preferencji
- Uwzględnienie nieokreśloności preferencji
- Badanie, analiza i próba usunięcia sprzeczności zawartych w deklarowanych preferencjach

PORÓWNIANIA I PREFERENCJE

- Możliwość wykorzystania przedstawionych narzędzi w innych modelach porównań ?
- Analiza sprzeczności
- Problem uporządkowania (tworzenia rankingów) na bazie nie do końca określonych porównań

SKALA LINGWISTYCZNA

$$R(x, y) = 1$$

x jest zdecydowanie lepszy od y

$$R(x, y) = 0.9$$

x jest dużo lepszy od y

$$R(x, y) = 0.8$$

x jest średnio lepszy od y

$$R(x, y) = 0.7$$

x jest trochę lepszy od y

$$R(x, y) = 0.6$$

x jest nieznacznie lepszy od y

$$R(x, y) = 0.5$$

x jest równoważny z y

$$R(x, y) = 0.4$$

y jest nieznacznie lepszy od x

$$R(x, y) = 0.3$$

y jest trochę lepszy od x

$$R(x, y) = 0.2$$

y jest średnio lepszy od x

$$R(x, y) = 0.1$$

y jest dużo lepszy od x

$$R(x, y) = 0$$

y jest zdecydowanie lepszy od x

PREFERENCJE GRUPOWE (WIELOKRYTERIALNE)

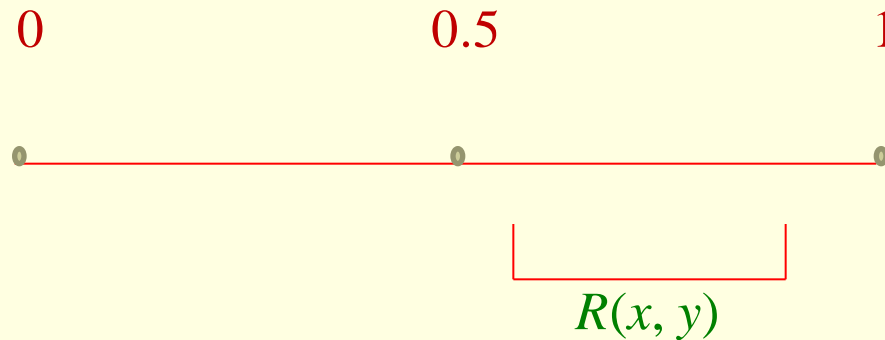
$$R(x, y) = \frac{\text{liczba głosujących (kryteriów), dla których } x > y}{\text{liczba wszystkich głosujących (kryteriów)}}$$

Zakładamy, że preferencje głosujących (porównania ze względu na kryteria) nie zawierają równoważności

RELACJE PRZEDZIAŁOWE (IPSODUALNE)

$R(x, y) = [R_L(x, y), R_U(x, y)]$ – przedziałowy stopień przewagi x nad y

$R_L(x, y) + R_U(y, x) = 1$ – ipsodualność



Preferencje decydenta są nieokreślone (niepewne). Decydent waha się.

PRZYKŁADY

$R(x, y) = [0.7, 0.8]$ x jest trochę lub średnio lepszy od y ,

$R(x, y) = [0.2, 0.3]$ y jest trochę lub średnio lepszy od x ,

$R(x, y) = [0.4, 0.6]$ x jest mniej więcej równoważny z y

$R(x, y) = [0, 1]$ x i y są nieporównywalne

RELACJE PRZEDZIAŁOWE (IPSODUALNE)

Model relacji przedziałowych

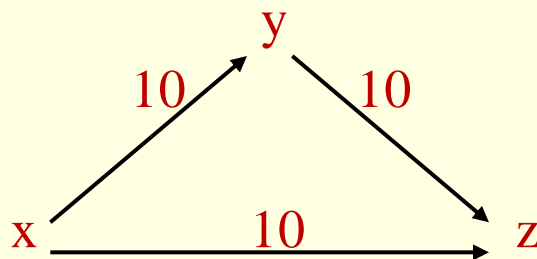
- jest rozszerzeniem klasycznego modelu relacyjnego
- uwzględnia intensywność preferencji
- uwzględnia niepewność i wahanie decydenta
- uwzględnia nieporównywalność wariantów

ZGODNOŚĆ DLA RELACJI STOPNIOWALNYCH I PRZEDZIAŁOWYCH

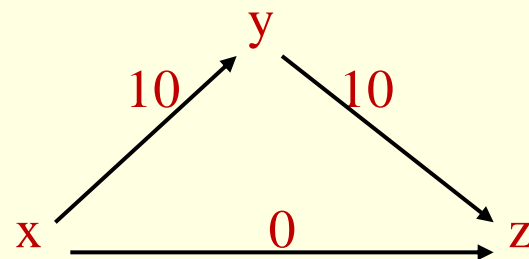
Problem:

Jak zdefiniować przechodniość (zgodność) dla stopniowalnych (przedziałowych) relacji preferencji?

Używamy skali $[0, 10]$ zamiast $[0, 1]$



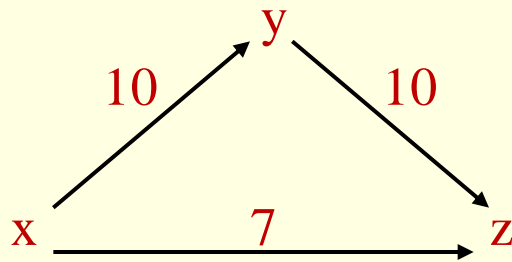
relacja zgodna



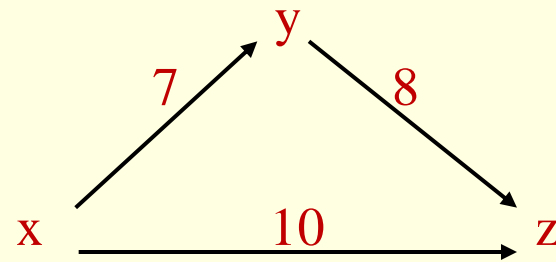
relacja niezgodna

ZGODNOŚĆ DLA RELACJI STOPNIOWALNYCH I PRZEDZIAŁOWYCH

A co w innych sytuacjach ?



zgodna ?



zgodna ?

FUNKCJA UŻYTECZNOŚCI

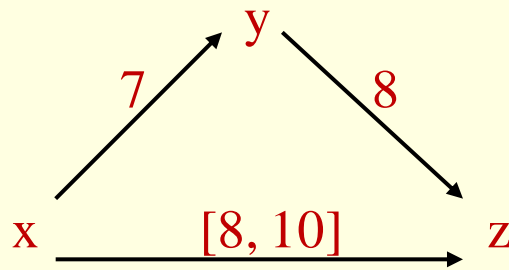
Reprezentacje dla relacji stopniowalnych (Świtalski, FSS, 2003)

$$R(x, y) = H(u(x), u(y)) \quad (1)$$

Warunki konieczne dla reprezentacji (1) ($\min (R(x, y), R(y, z)) \geq 5$)

$$\max (R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z) \leq R(x, y) + R(y, z) - 5 \quad (2)$$

Przykład:



$$R(x, z) \in [8, 10]$$

REPREZENTACJE LINIOWE

Szczególny przypadek (1):

$$R(x, y) = 0,5(u(x) - u(y)) + 5,$$

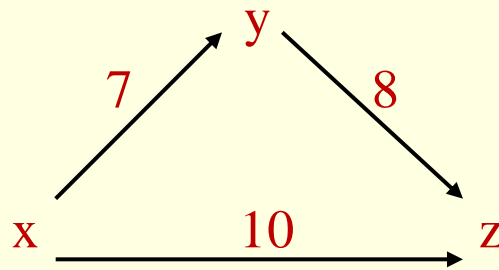
(zakładamy, że $|u(x) - u(y)| \leq 10$)

Warunek zgodności (2):

$$R(x, z) = R(x, y) + R(y, z) - 5$$

(Tanino, FSS, 1984)

Przykład:

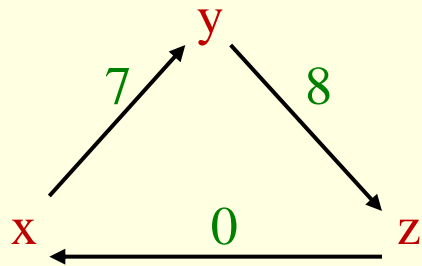


$$R(x, z) = 10$$

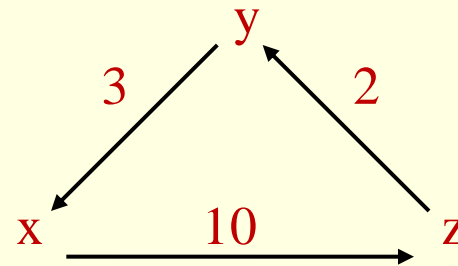
REPREZENTACJE LINIOWE

Warunek równoważny warunkowi (2) w przypadku liniowym:

$$R(x, y) + R(y, z) + R(z, x) = R(x, z) + R(z, y) + R(y, x)$$



$$R(x, y) + R(y, z) + R(z, x) = 15$$



$$R(x, z) + R(z, y) + R(y, x) = 15$$

ZGODNOŚĆ DLA RELACJI PRZEDZIAŁOWYCH

Relacje przedziałowe – różne podejścia :

1. Xu, Li, Wang (2014) – arytmetyka przedziałowa:

$$R(x, z) = R(x, y) + R(y, z) - [5, 5]$$

Może zależeć od kolejności (x, y, z) !

2. Wang, Li (2012)

$$R(x, y) + R(y, z) + R(z, x) = R(x, z) + R(z, y) + R(y, x)$$

Warunek wrażliwy na niewielkie przesunięcia brzegów przedziałów !
(brak elastyczności)

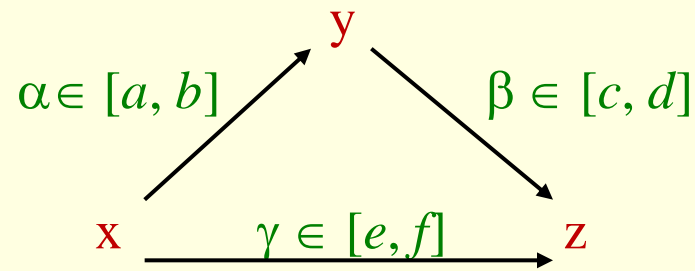
PODEJŚCIE 3Q

Relacja przedziałowa $R = ([a, b], [c, d], [e, f])$

$$([a, b] = R(x, y), [c, d] = R(y, z), [e, f] = R(x, z))$$

może być interpretowana jako rodzina relacji stopniowalnych

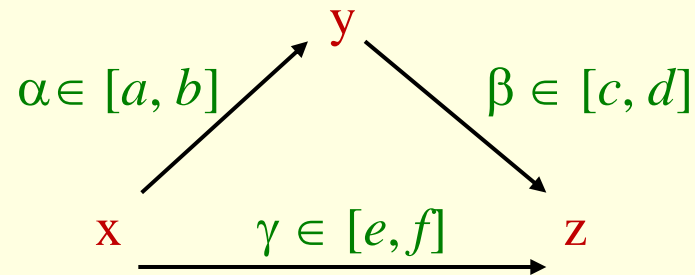
$$S(R) = \{ (\alpha, \beta, \gamma) : \alpha \in [a, b], \beta \in [c, d], \gamma \in [e, f] \}$$



PODEJŚCIE 3Q

$$R = ([a, b], [c, d], [e, f])$$

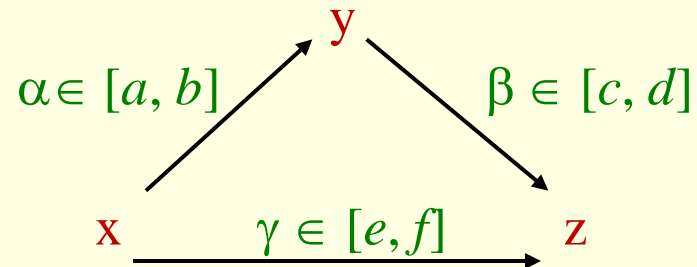
$$S = (\alpha, \beta, \gamma) \quad \alpha \in [a, b], \beta \in [c, d], \gamma \in [e, f]$$



Minimalny warunek zgodności dla R :

Istnieje przynajmniej jedna relacja $S = (\alpha, \beta, \gamma)$, która jest zgodna (jako relacja stopniowalna)

PODEJŚCIE 3Q

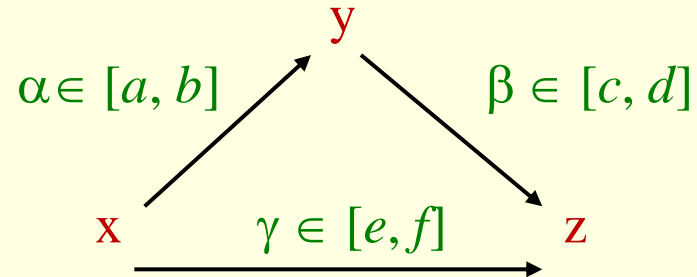


Warunek 3Q :

$$\exists \alpha \in R(x, y) \exists \beta \in R(y, z) \exists \gamma \in R(x, z), \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in C,$$

C jest tutaj pewnym zbiorem zgodnych relacji stopniowalnych w zbiorze $\{x, y, z\}$ – nazywanym zbiorem zgodności

PODEJŚCIE 3Q



Krejčí (Computers & Industrial Engineering, 2017)

$$\exists \alpha \in R(x, y) \exists \beta \in R(y, z) \exists \gamma \in R(x, z), \quad \alpha + \beta - 5 = \gamma,$$

(słaba zgodność)

$$\forall \alpha \in R(x, y) \exists \beta \in R(x, z) \exists \gamma \in R(z, y), \quad \alpha + \beta - 5 = \gamma,$$

(zgodność)

PODEJŚCIE 3Q

Świtalski (Fuzzy Sets and Systems, 2022)

$$\exists \alpha \in R(x, y) \exists \beta \in R(y, z) \exists \gamma \in R(x, z), \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in C, \quad (\text{WC})$$

$$\forall \alpha \in R(x, y) \exists \beta \in R(x, z) \exists \gamma \in R(z, y), \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in C, \quad (\text{CON})$$

$$\forall \alpha \in R(x, y) \forall \beta \in R(x, z) \exists \gamma \in R(z, y), \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in C, \quad (\text{SC})$$

$$\forall \alpha \in R(x, y) \forall \beta \in R(x, z) \forall \gamma \in R(z, y), \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in C, \quad (\text{VSC})$$

PODEJŚCIE 3Q

Zalety podejścia 3Q:

- Mamy do dyspozycji **nieskończoną rodzinę** warunków zgodności, począwszy od bardzo słabych, skończywszy na bardzo silnych,
- Warunek zgodności możemy dobrać w zależności od sytuacji decyzyjnej, w której chcemy opisywać preferencje decydenta (np. **słabo lub silnie ustrukturalizowana**),
- Warunki 3Q mogą być wykorzystane do konstrukcji odpowiednich **wskaźników zgodności** mierzących stopień w jakim dana relacja przedziałowa jest zgodna,
- Warunki 3Q są **niezmiennicze ze względu na permutacje** i na ogół spełniają pewne warunki **elastyczności**.

WSKAŹNIKI ZGODNOŚCI

Problem badania zgodności nie polega jedynie na umiejętności rozróżniania relacji zgodnych i niezgodnych, ale raczej na umiejętności mierzenia stopnia w jakim dana relacja preferencji jest zgodna.

Niech C będzie pewnym zbiorem zgodności a R – relacją przedziałową w zbiorze X .

Definiujemy liczbę (wskaźnik zgodności dla R ze względu na C) :

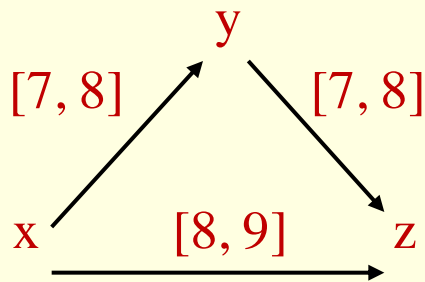
$$CI(R, C) = \begin{cases} 4, & \text{jeśli } R \text{ spełnia warunek (VSC)} \\ 3, & \text{jeśli } R \text{ spełnia (SC), ale nie spełnia (VSC)} \\ 2, & \text{jeśli } R \text{ spełnia (CON), ale nie spełnia (SC)} \\ 1, & \text{jeśli } R \text{ spełnia (WC), ale nie spełnia (CON)} \\ 0, & \text{jeśli } R \text{ nie spełnia (WC)} \end{cases}$$

WSKAŹNIKI ZGODNOŚCI

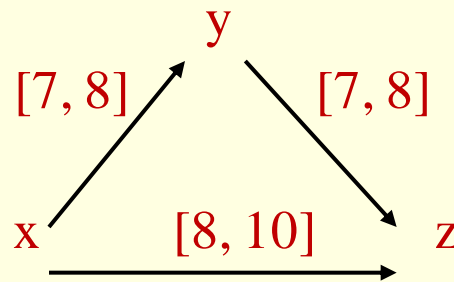
Przykład

Bierzemy $C = MA$ – zbiór zgodności zdefiniowany za pomocą warunku max- addytywnego

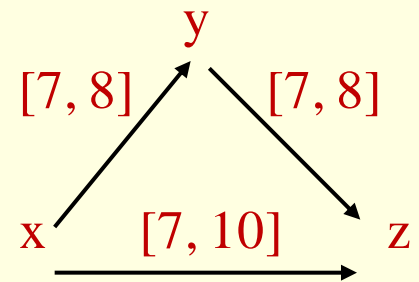
$$\alpha \geq 5 \wedge \beta \geq 5 \Rightarrow \max(\alpha, \beta) \leq \gamma \leq \alpha + \beta - 5$$



$$CI(R, MA) = 4$$
$$R \in (VSC)$$

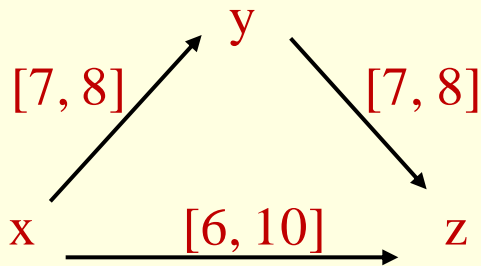


$$CI(R, MA) = 3$$
$$R \in (SC)$$

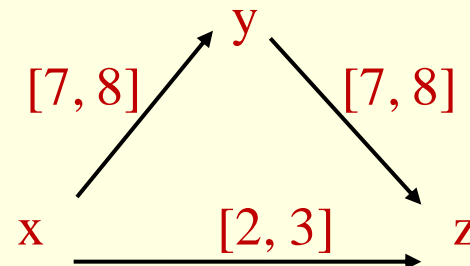


$$CI(R, MA) = 2$$
$$R \in (CON)$$

WSKAŹNIKI ZGODNOŚCI



$$CI(R, MA) = 1$$
$$R \in (VSC)$$



$$CI(R, MA) = 0$$
$$R \text{ niezgodna}$$

WSKAŹNIKI ZGODNOŚCI

Maciej Madej (M.Madej, praca magisterska, UZ, 2021) zbadał kilkaset przykładów relacji przedziałowych w zbiorach 3-elementowych.

Przykłady te pokazują, że w większości przypadków wskaźnik $CI(R, MA)$ jest całkiem dobrą miarą zgodności (daje wyniki zgodne z intuicją)

M. Madej przeprowadził też eksperyment, w którym badał wskaźniki zgodności dla preferencji rzeczywistych decydentów (wyrażonych za pomocą relacji stopniowalnych lub przedziałowych)

EKSPERYMENT Z UDZIAŁEM RZECZYWISTYCH DECYDENTÓW

Grupa złożona z 71 respondentów porównywała 5 różnych środków transportu (autobus, samochód, pociąg, statek, samolot)

Otrzymano 710 trójek, dla których obliczono łączony wskaźnik zgodności (A – addytywna (liniowa) funkcja zgodności)

$$GCI(R) = CI(R, MA) + CI(R, A)$$

Wartości $GCI(R)$ mogą należeć do przedziału $[0, 8]$

EKSPERYMENT Z UDZIAŁEM RZECZYWISTYCH DECYDENTÓW

Przedział możliwych wartości $GCI(R) = [0, 8]$

Przedział możliwych wartości $GCI(R)$ dla relacji przedziałowych = $[0, 6]$

Średnia wartość $GCI(R) = 3.22$

Rozkład $GCI(R)$ jest dwuwierzchołkowy:

$GCI(R) = 0$ dla około 24 % trójek

$GCI(R) = 4$ dla około 55 % trójek

$GCI(R) \geq 4$ dla około 67 % trójek

WNIOSKI

- Została zdefiniowana **nieskończona rodzina** warunków zgodności dla przedziałowych relacji preferencji. Warunki te są **niezmiennicze ze względu na permutacje** i posiadają odpowiednie własności **elastyczności**.
- Zdefiniowane warunki **tworzą hierarchię** – mamy do dyspozycji warunki **słabsze i silniejsze** i dzięki temu mogą być one stosowane w różnych sytuacjach decyzyjnych (np. **słabo lub silnie ustrukturalizowanych**).
- Zostały zdefiniowane **wskaźniki zgodności**, które mogą być zastosowane do mierzenia stopnia zgodności przedziałowej relacji preferencji.
- Eksperymenty numeryczne i eksperymenty z udziałem rzeczywistych decydentów pokazały, że zdefiniowane warunki i wskaźniki są **zgodne z intuicją** i dzięki temu **mogą być stosowane w praktyce** (np. w systemach wspomagania decyzji i w systemach uczenia maszynowego).