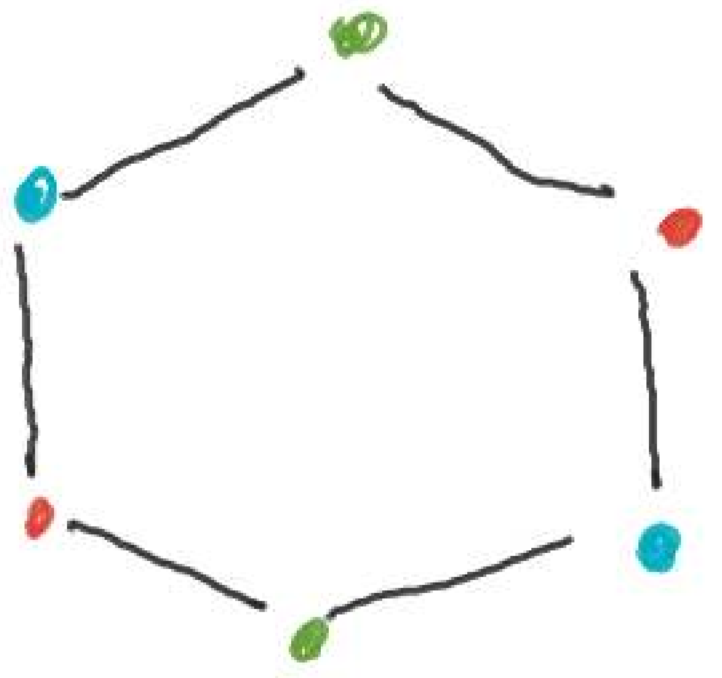
Marcin Anholcer
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Katedra Badań Operacyjnych
i Ekonomii Matematycznej

O b-kolorowaniach, czyli jak szybko znaleźć dobre przybliżenie kolorowania poprawnego

Anholcer M., Cichacz S., Peterin I. (2022+), On b-acyclic chromatic number of a graph. https://arxiv.org/abs/2206.06478

Kolorowanie poprawne (właściwe)

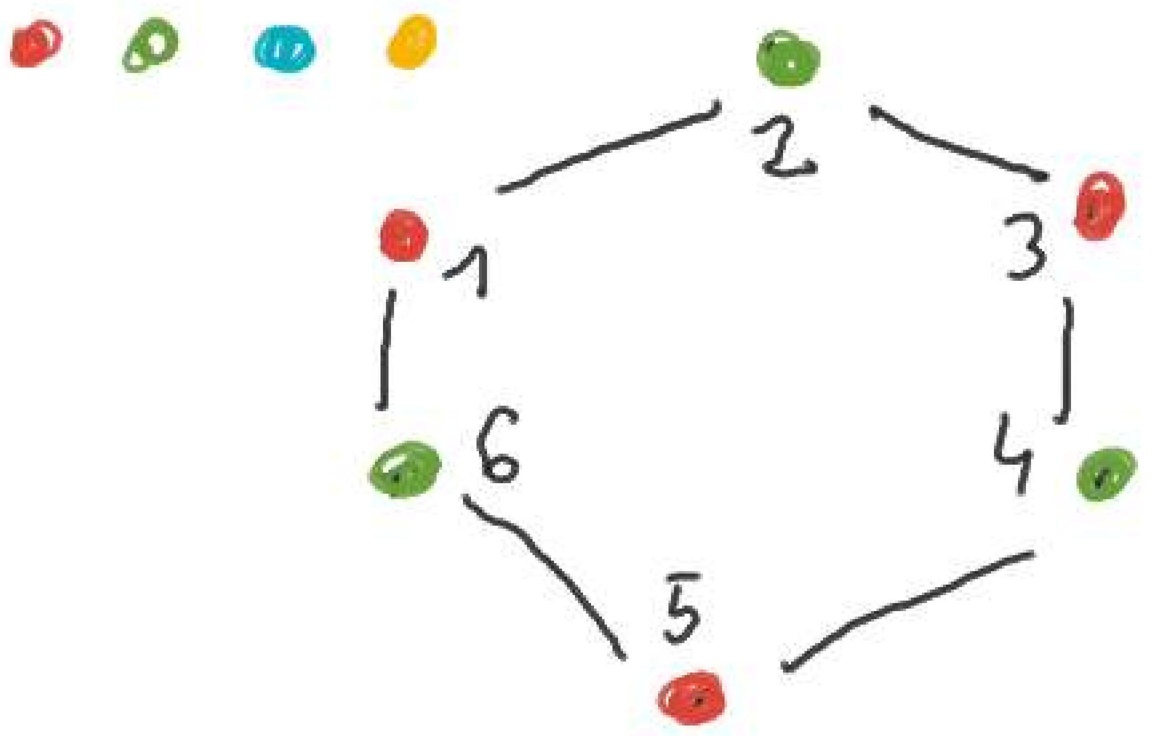


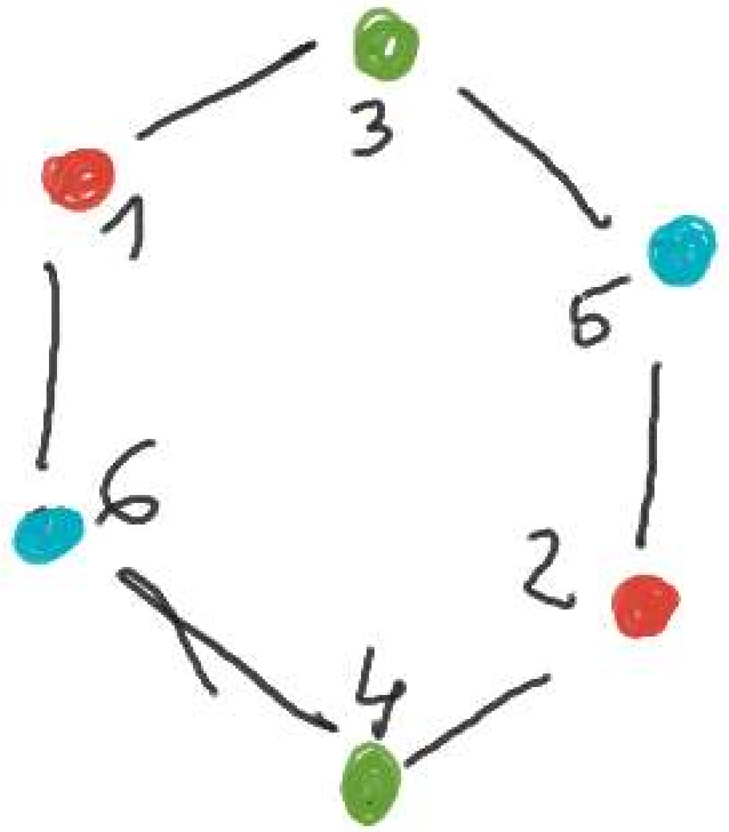
- problem NP-trudny
- minimalna liczba kolorów:
  liczba chromatyczna $\chi(G)$

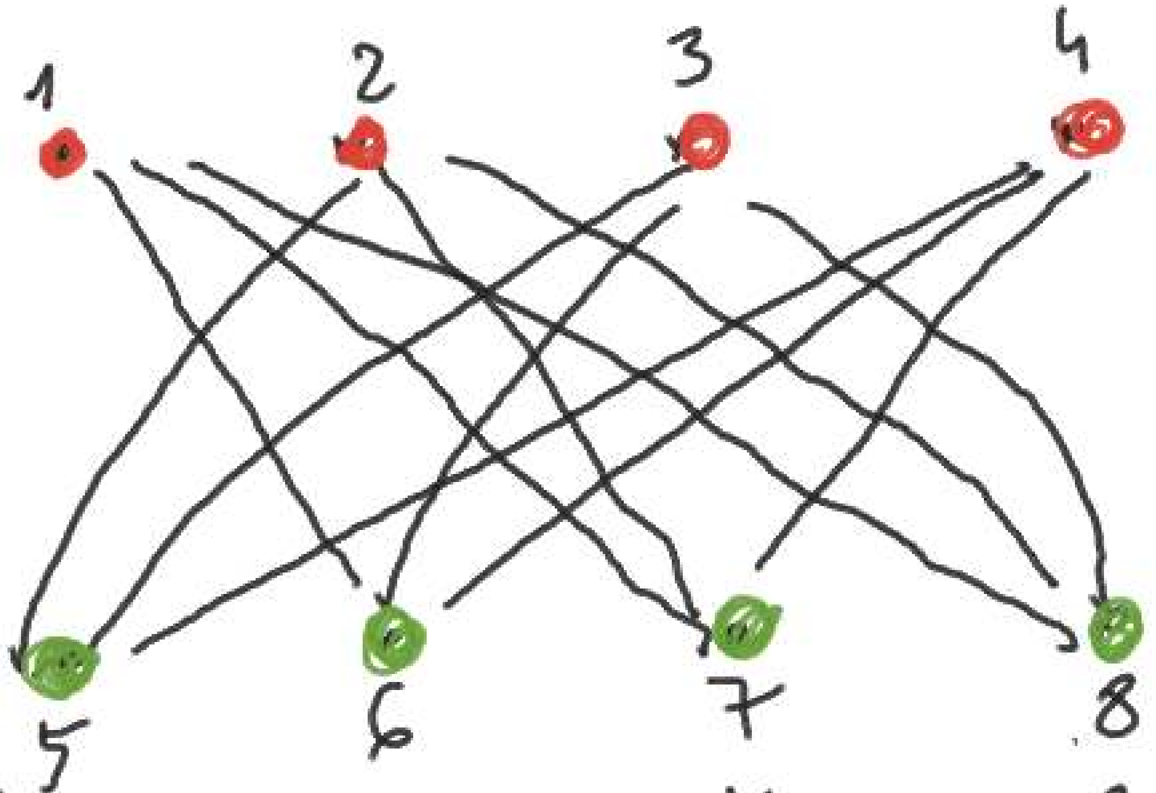
ALGORYTMY

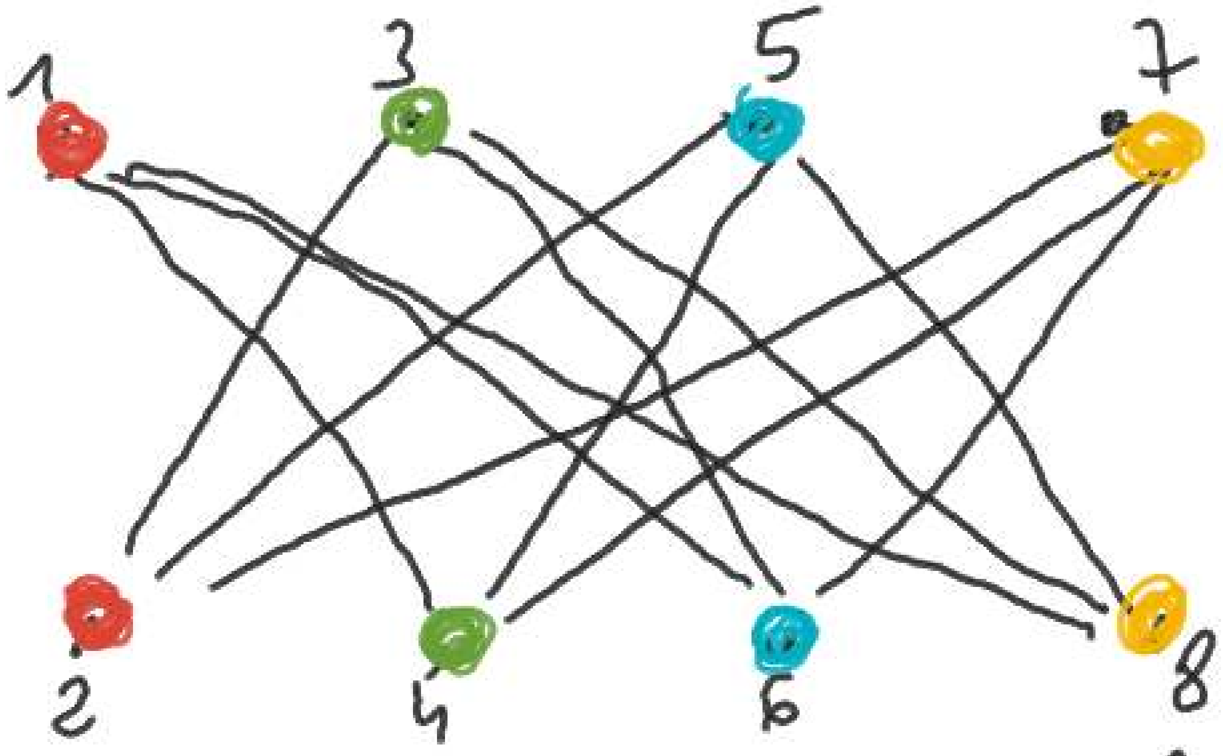
- dokładne – wolne (np. metoda Christofidesa)
- przybliżone:
  - → zachłanny
  - → PRZEKOLOROWUJĄCY

Algorytm zachłanny



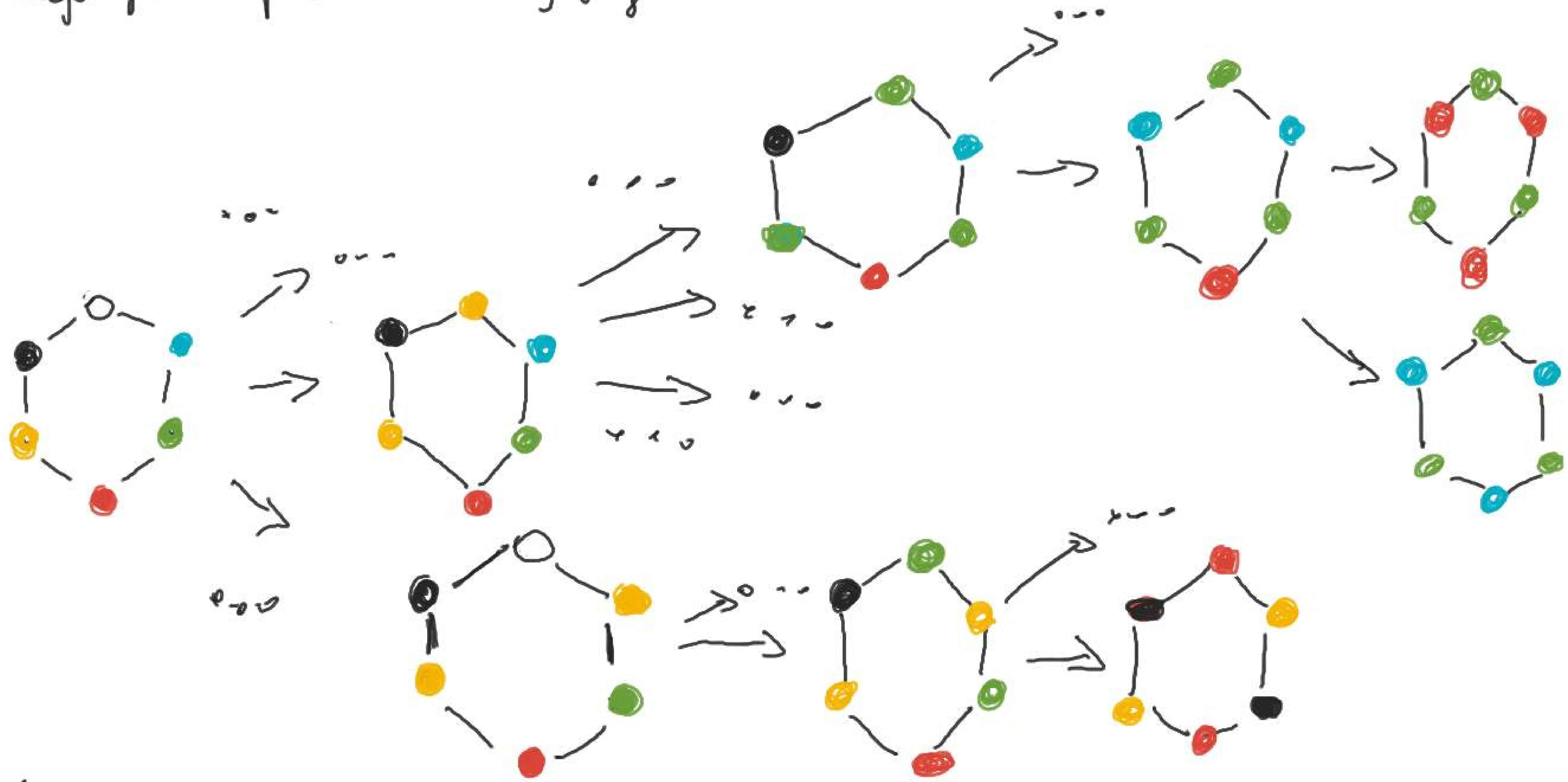






Najgorszy wynik – liczba chromatyczna Grundy'ego

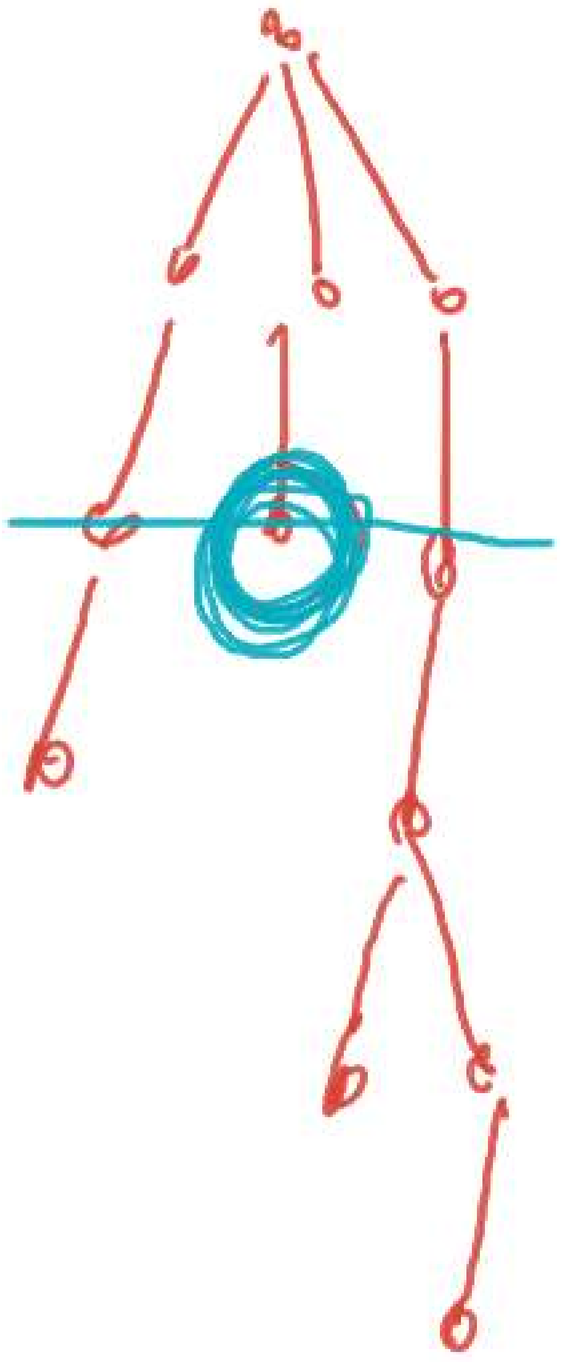
Algorytm przekolorowujący



b-wierzchołek, liczba b-chromatyczna

1. definicja: poset

2. definicja: b - wierzchołki



Liczba b - chromatyczna $\varphi(G)$

Naturalne ograniczenie:

potrzeba co najmniej $\varphi(G)$ wierzchołków z
$$d_G(v) \geq \varphi(G) - 1$$

m-stopień $m(G) = \max\{i : i-1 \leq d_G(v_i)\}$,
$d_G(v_1) \geq \ldots \geq d_G(v_n)$

$\varphi(G) \leq m(G)$

Dokładnie: problem NP-zupełny

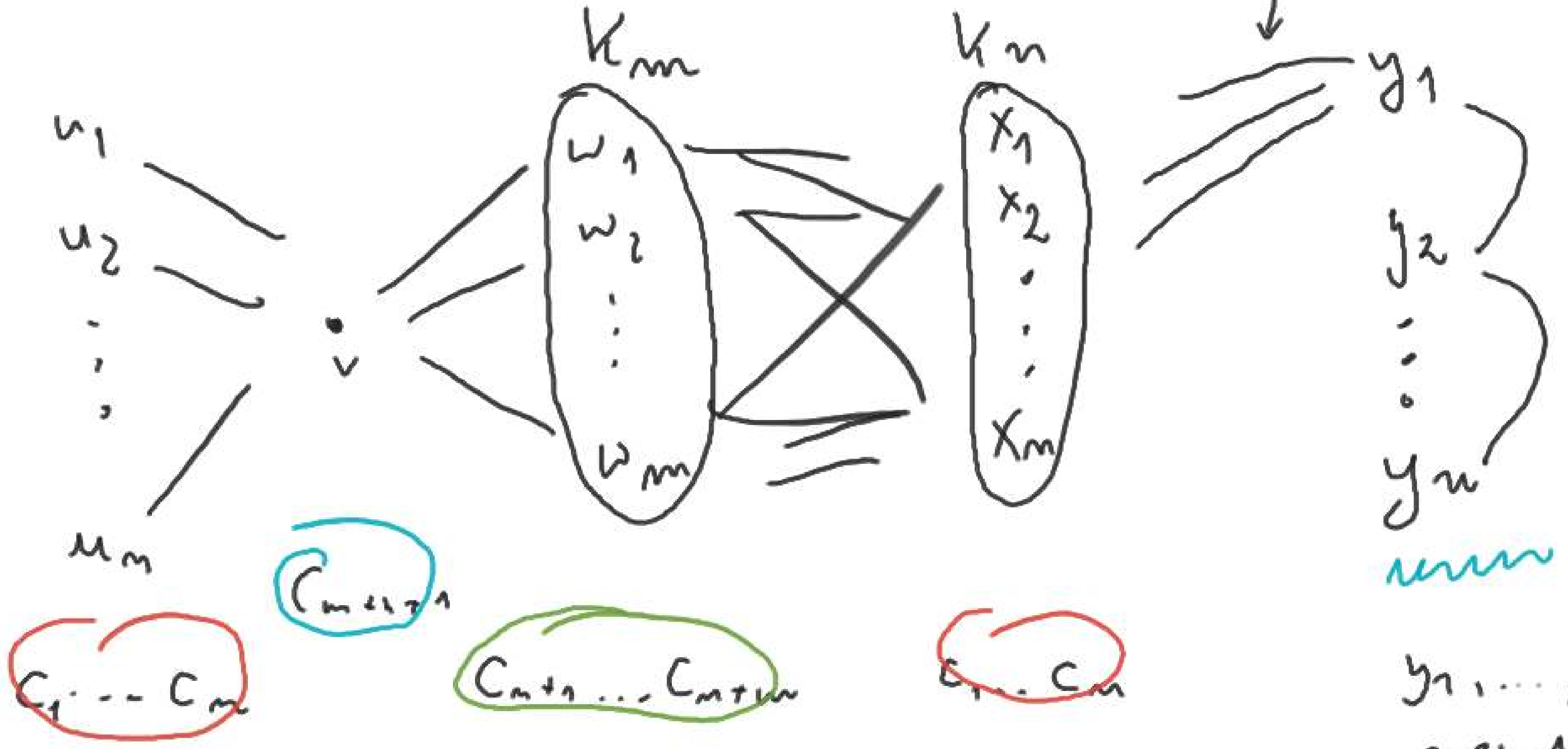
X3C (Exact cover by 3-sets)

Zbiór $S=\{s_1,\dots,s_n\}$, $n=3k$, podzbiory $T=\{T_1,\dots,T_m\}$, $|T_i|=3$

Pytanie: czy T zawiera pokrycie $T_1,\dots,T_k$ zbioru S?

Redukcja z X3C:

$x_i \sim y_j \iff s_i \in T_j$

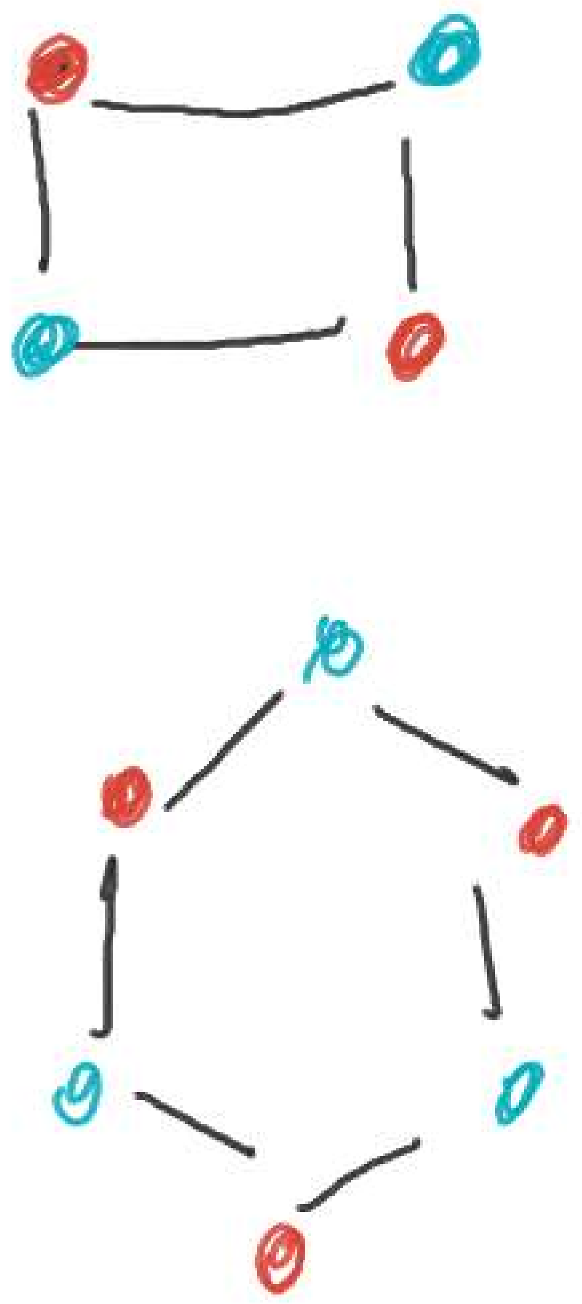


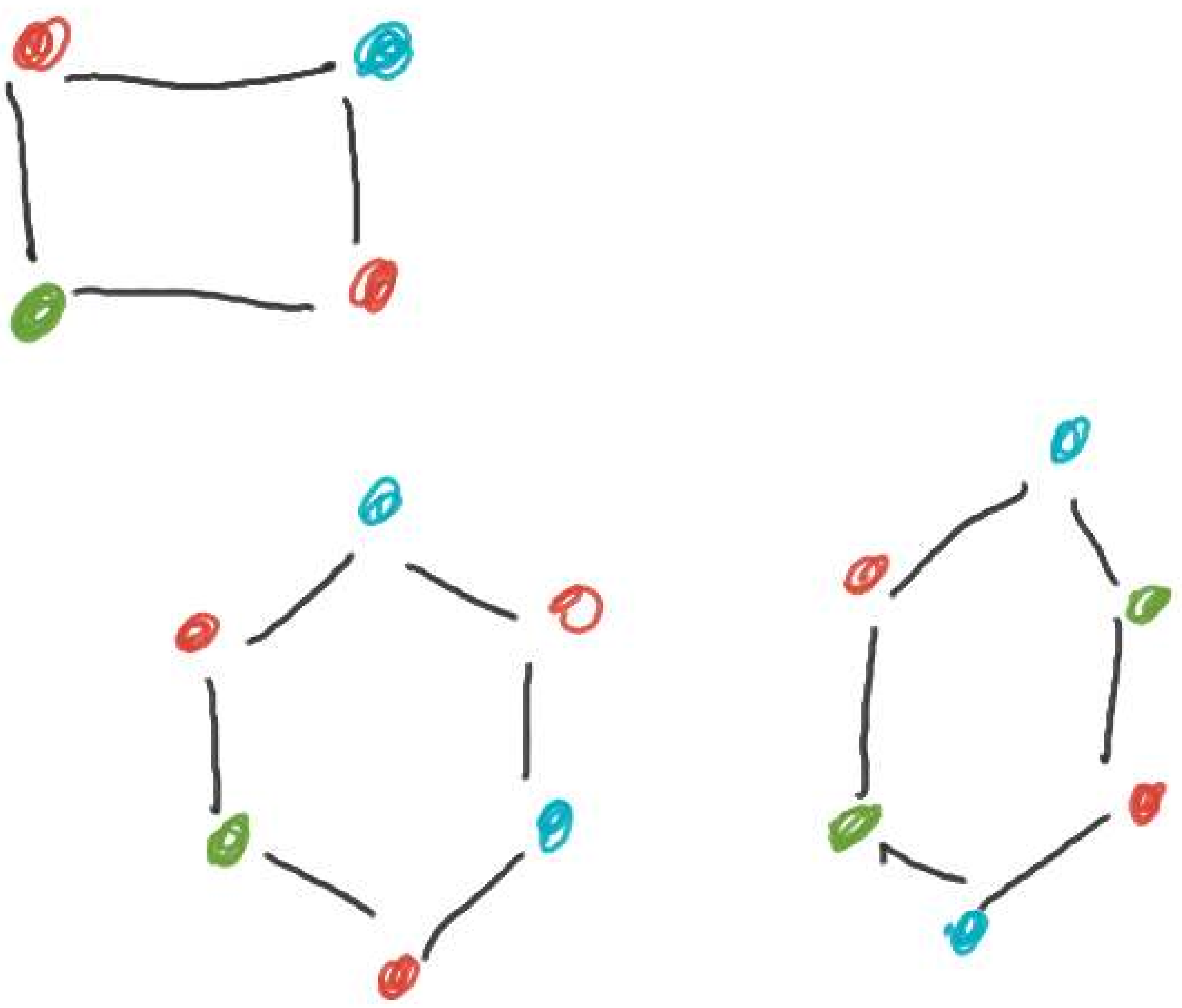
$y_i \sim y_j \iff T_i \cap T_j \neq \emptyset$

$y_1,\dots,y_n \to C_{m+n+1}$

reszta – dowolnie

Kolorowanie acykliczne – brak dwukolorowych cykli



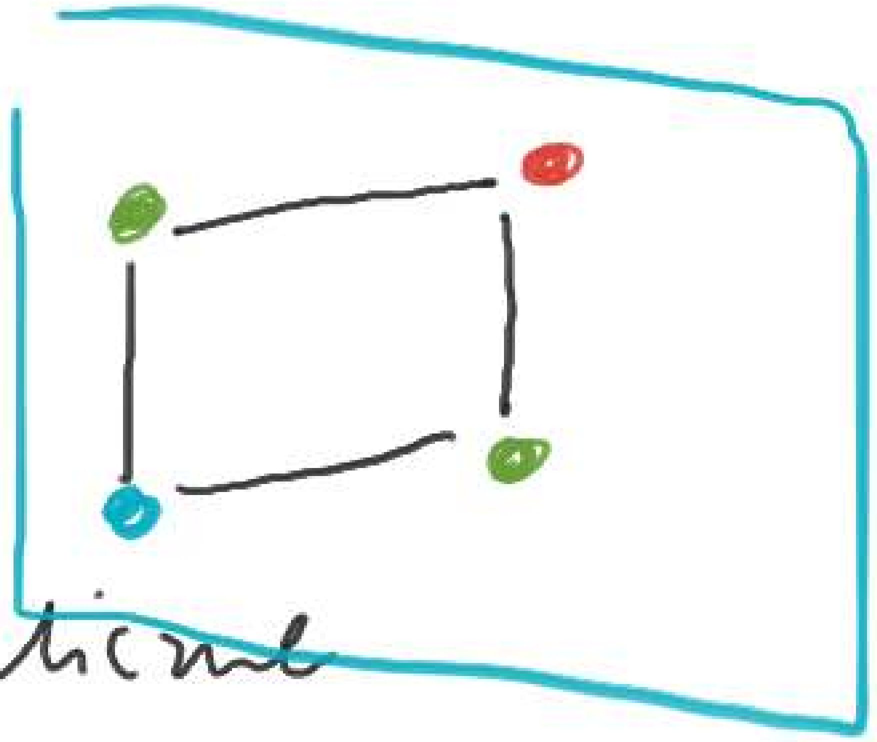


Nieparzyste nie są problemem:

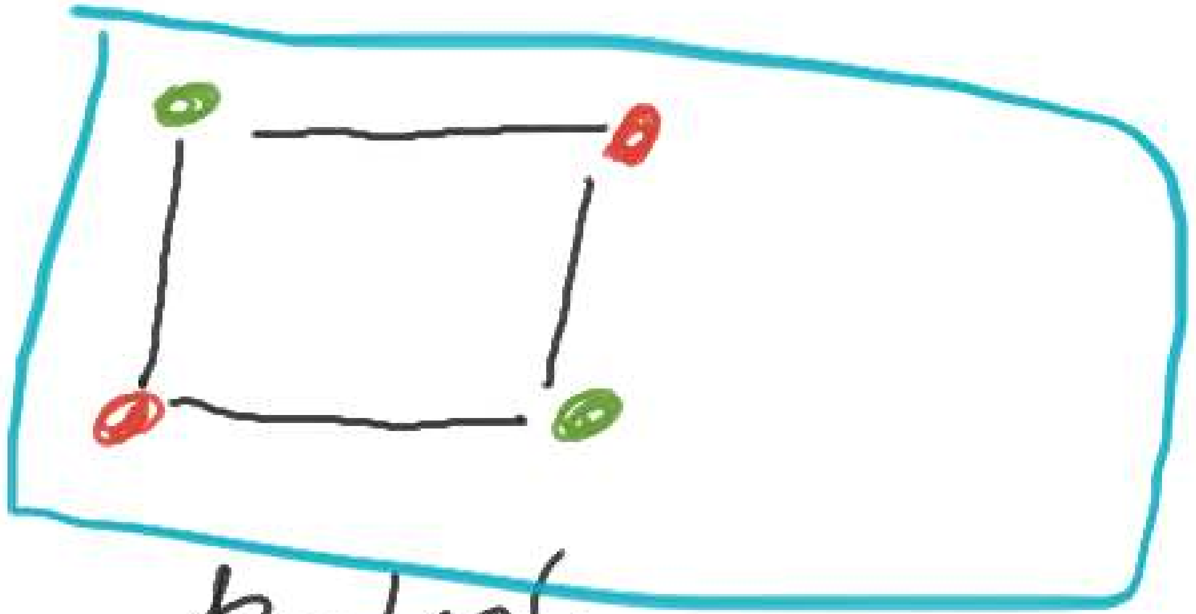
$A(G)$
ac. l. chrom.

k-acykliczne kolorowania

acykliczne + k-kolorowanie = źle

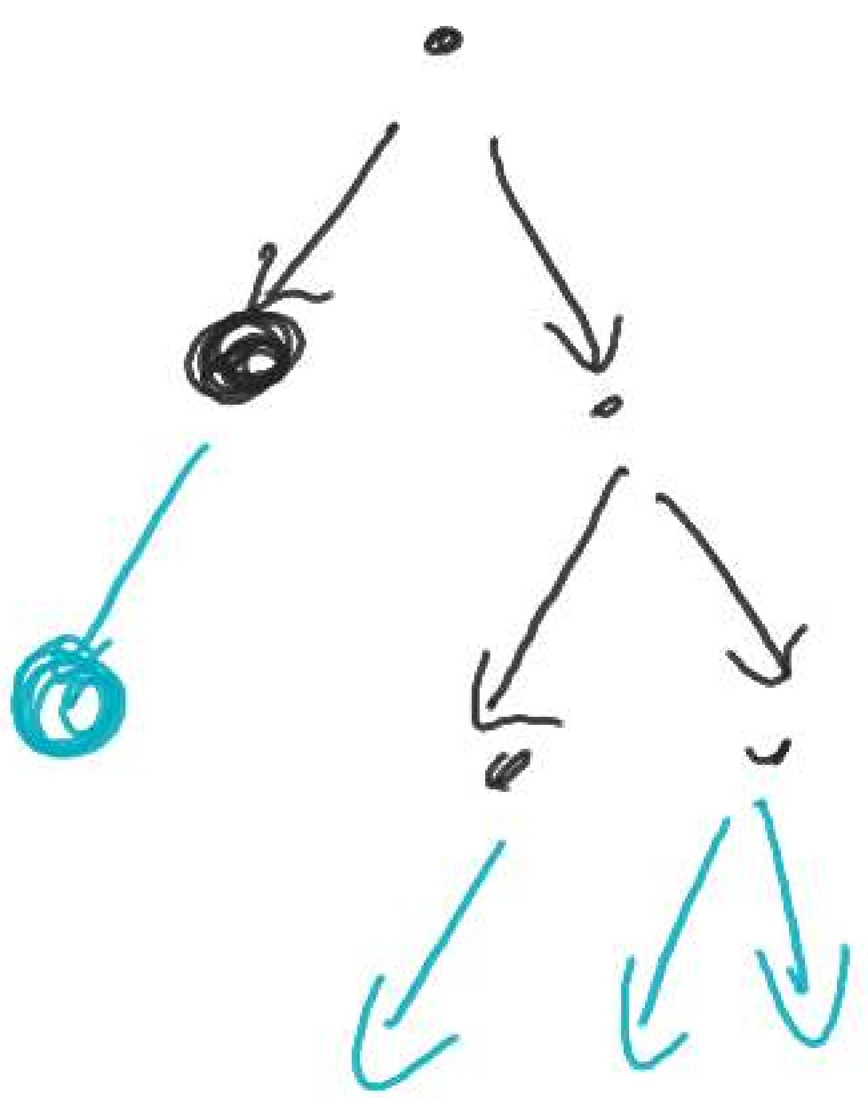


acykliczne



k-kol.

→ definicja przez poset

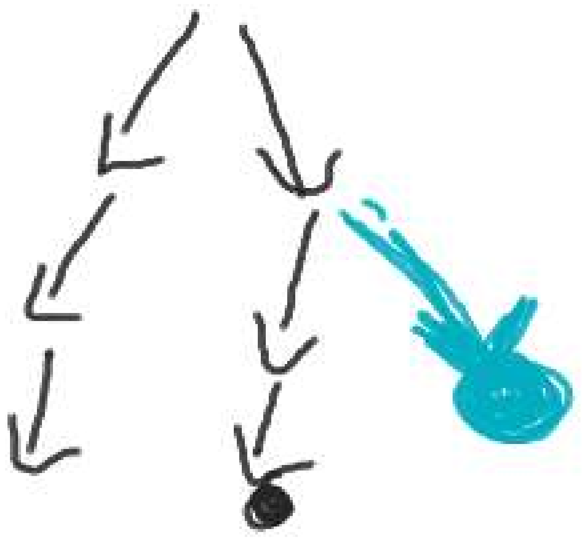


– tylko acykliczne

Pytanie:

1) Czy jest dobrze zdefiniowane?

2) Czy $A_b(G) \geq \varphi(G)$?



Wybrane wyniki

1) $\omega(G) \leq \chi(G) \leq A(G) \leq A_b(G) \leq n_G$

2) $A_b(G) = n_G \iff G \simeq K_{n_G}$

3) b-wierzchołki – nie wystarczą
   - → trzeba wziąć pod uwagę nie tylko sąsiedztwa, ale też cykle
   - → cykle mogą się przecinać
   - → definicje i warunki równoważne robią się skomplikowane

Inne wyniki

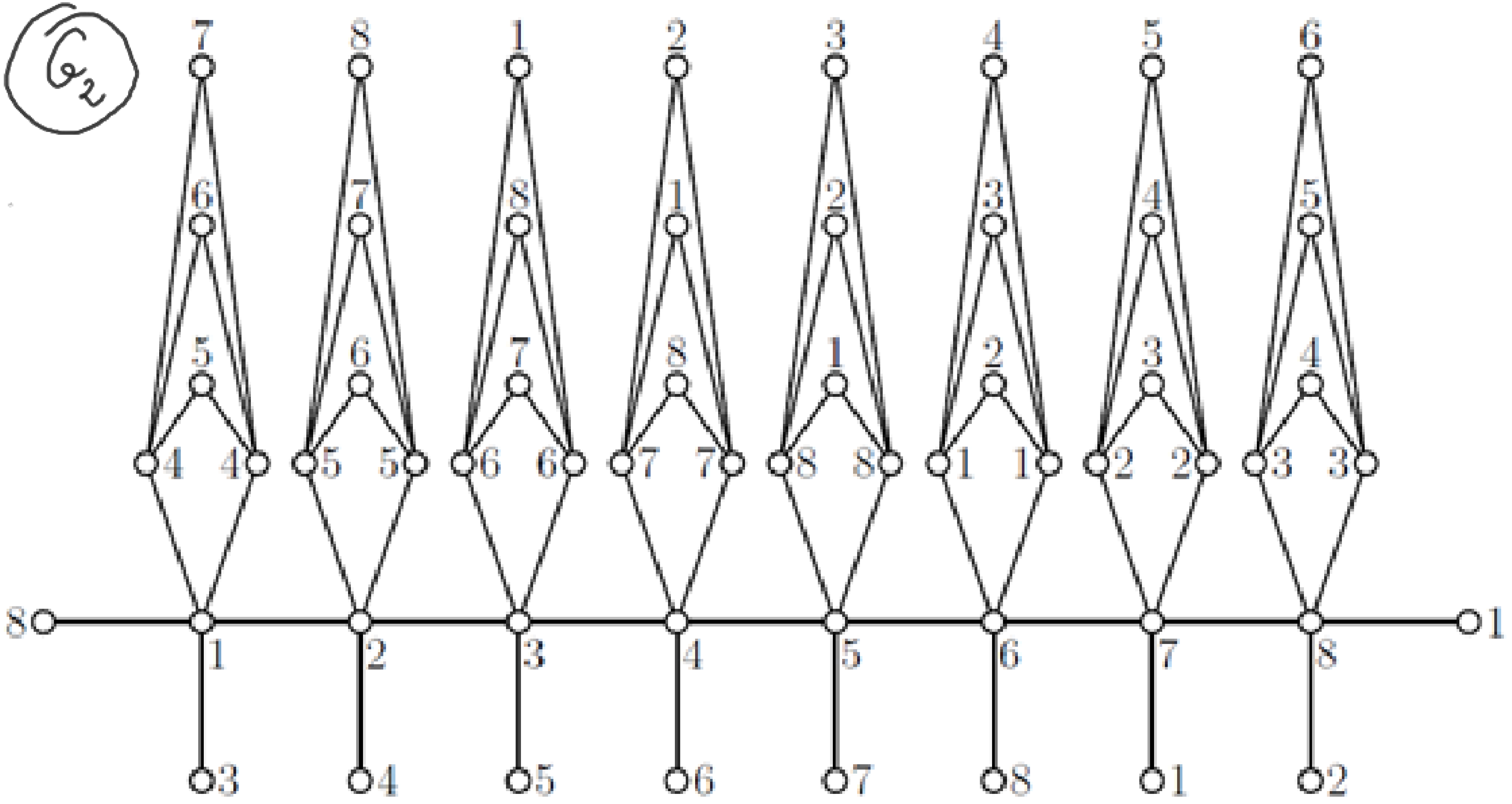
$d_G^a(v)$ - stopień zliczający sąsiadów, ale też odpowiednio przecinające się cykle

$$m_a(G) = \max\{i : i-1 \leq d_G^a(G)\}$$

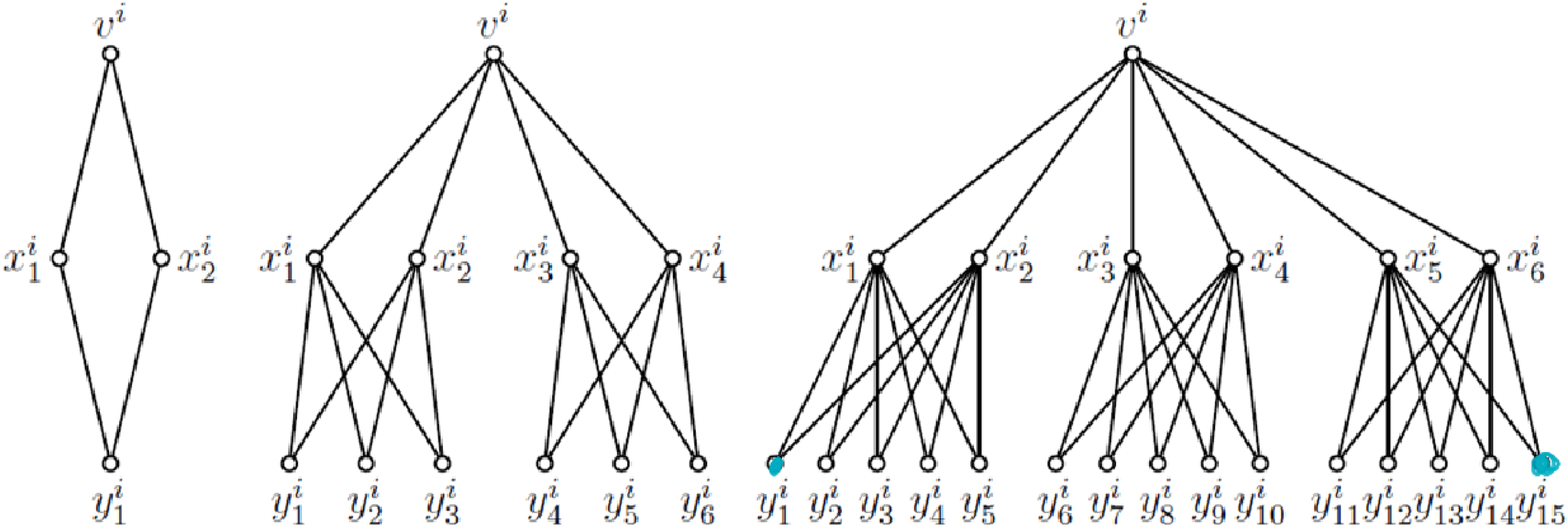
$$A_b(G) \leq m_a(G)$$

$$A_b(G) \leq \frac{1}{2}(\Delta(G))^2+1$$

Istnieje rodzina G_1, G_2 taka że $(A_b(G_n) - \Delta(G_n)) \to \infty$



Istnieje rodzina $G_1, G_2, \ldots$ taka, że $A_b(G_n) = m_a(G_n) = \frac{1}{2}(\Delta(G_n))^2 + 1$

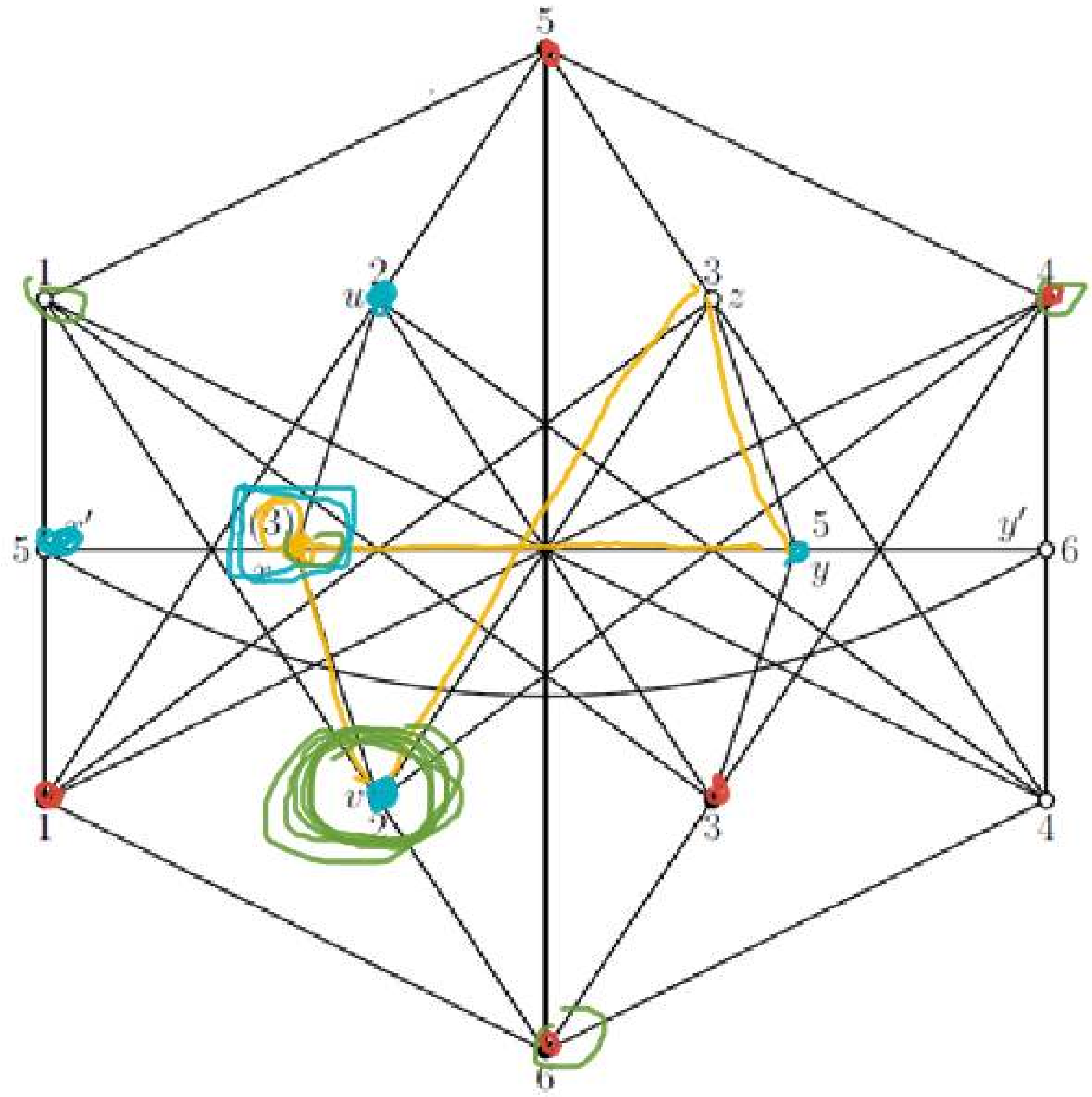


- szczególna rodzina (joins)

- $A_b(k_{n,m}) = 1 + \max\{n, m\}$

$\Rightarrow$ istnieje rodzina taka, że $(A_b(G_n) - \varphi(G_n)) \to \infty$

Relacja między $A_b(G)$ i $\varphi(G)$



$c(x)=6$ – b-col.

$xx'y'yx$ – nie acykliczne

$c(x)=3$ – acykliczne

– 5 b-wierzchołków

– b-acykliczny v

ale brak b-wierzchołka w klasie 2 $(vzyxv)$

Otwarte problemy:

- relacja między $A_b(G) \overset{?}{\geq} \varphi(G)$
- złożoność obliczeniowa
- wielomianowe algorytmy dla wyznaczania parametrów

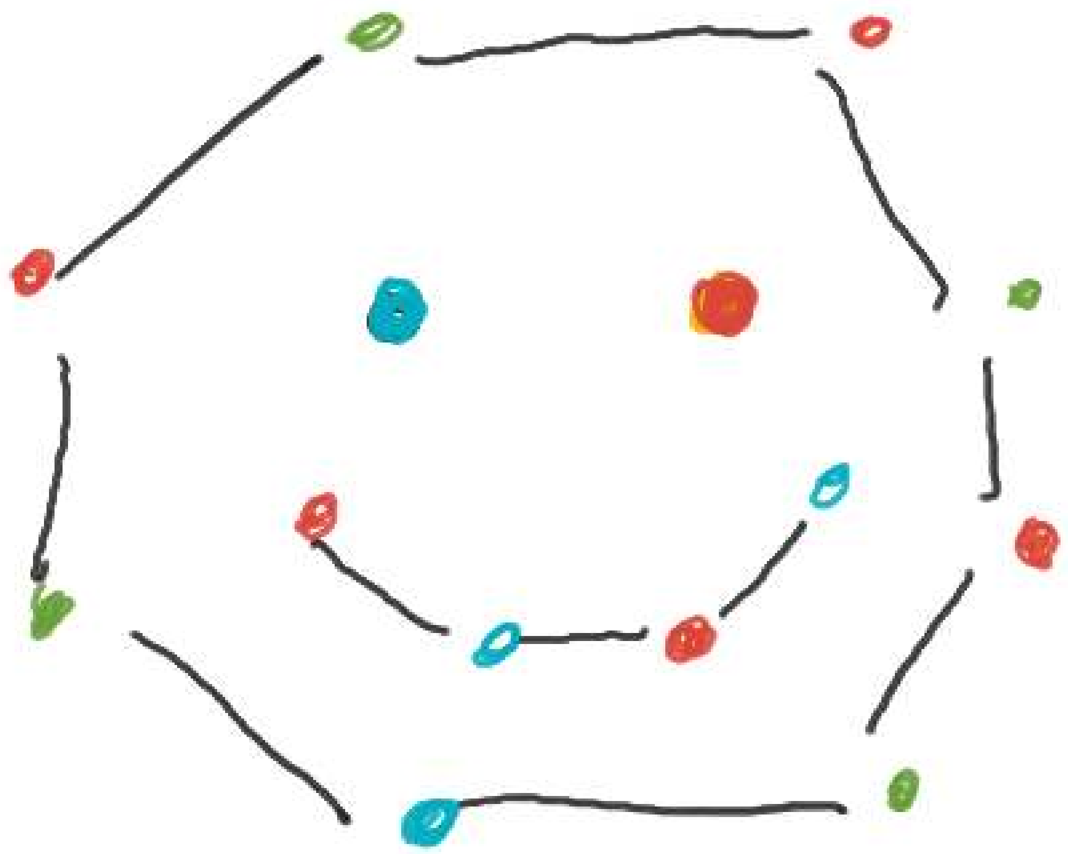
  $d_G^a(G)$

  $m_a(G)$

  $A_b(G)$

  w wybranych rodzinach grafów
- a może jakieś dokładne wzory / lepsze ograniczenia?

Dziękuję za uwagę



Marcin Anholcer
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Katedra Badań Operacyjnych
i Ekonomii Matematycznej

O b-kolorowaniach, czyli jak szybko znaleźć dobre przybliżenie kolorowania poprawnego

Anholcer M., Cichacz S., Peterin I. (2022+), On b-acyclic chromatic number of a graph. https://arxiv.org/abs/2206.06478