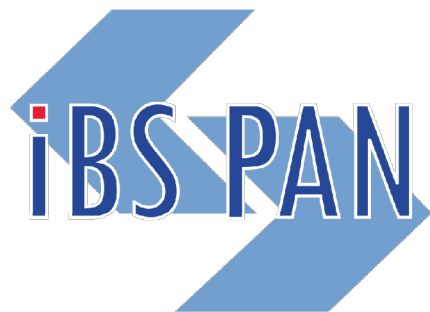


Oszacowania parametryczne ocen efektywnych w całkowitoliczbowych problemach optymalizacyjnych wielkiej skali



Janusz Miroforidis

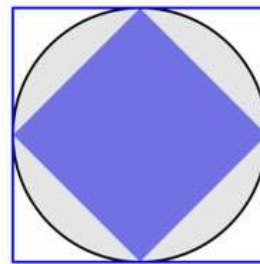
Zakład Wspomagania Decyzji w Warunkach Ryzyka

Oszacowania od góry i od dołu są praktyczne!

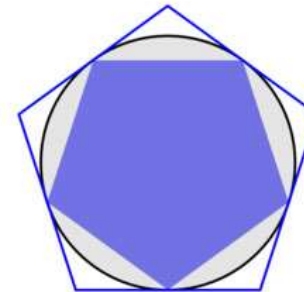
Archimedes of Syracuse



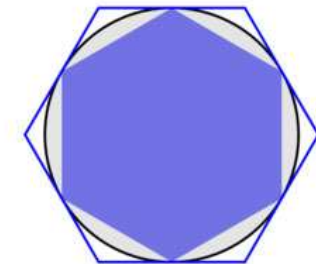
Archimedes Thoughtful
by Domenico Fetti (1620)



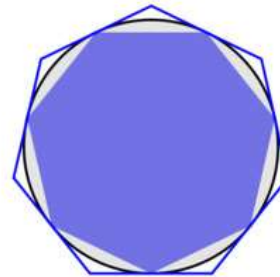
$n=4$



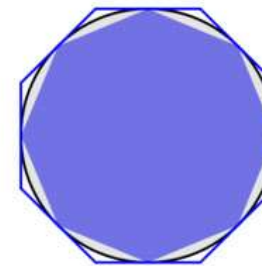
$n=5$



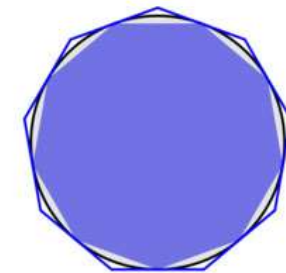
$n=6$



$n=7$



$n=8$



$n=9$

Wprowadzenie

- W polu naszego zainteresowania są *wielokryterialne całkowitoliczbowe problemy optymalizacyjne* (liniowe lub kwadratowe) – (ang. **Multiobjective MIP problems**).
- Służą one do modelowania wielu praktycznych problemów decyzyjnych (np. wielokryterialnego wielowymiarowego zagadnienia załadunku, problemu Markowitza z ograniczeniem na liczbę instrumentów, wielokryterialnego zagadnienia trasowania).
- Warianty efektywne problemów MMIP mogą być wyznaczane za pomocą technik skalaryzacji, a więc poprzez rozwiązywanie skalarnych całkowitoliczbowych problemów optymalizacyjnych (MIP).
- Kuszące jest zatem wykorzystywanie do tego optymalizatorów MIP, w szczególności narzędzi komercyjnych, w których skumulowana jest wiedza z dziedziny optymalizacji całkowitoliczbowej z ostatnich kilkudziesięciu lat.
- Jednak mimo znaczącego rozwoju technik obliczeniowych, problemy MIP **wielkiej skali** wciąż stanowią wyzwanie dla wiodących optymalizatorów (CPLEX, GUROBI itp.).
- Wyznaczenie pojedynczego wariantu efektywnego może być bardzo czasochłonne (np. 10 godzin).

Wprowadzenie

- Naturalne wydaje się zatem, szczególnie w kontekście nawigacji decydenta na froncie Pareto (*interaktywne metody wielokryterialnego podejmowania decyzji*), przyjęcie ustalonego budżetu dla potrzeb wyznaczania pojedynczych wariantów efektywnych.
- Załóżmy, że ten budżet mierzony jest czasem obliczeń, a więc istnieje *limit czasu* na obliczenia optymalizacyjne, dla potrzeb wyznaczenia pojedynczego wariantu efektywnego.
- Kiedy optymalizator osiąga ten limit wyznaczając rozwiązanie, które nie jest efektywne, decydent nie wie, jak blisko frontu Pareto ocena tego rozwiązanie się znajduje.
- Cechuje to również wszystkie metaheurystyki (np. algorytmu ewolucyjne), stosowane do wyznaczania aproksymacji pojedynczych elementów frontu Pareto lub całego frontu Pareto.

Wprowadzenie

- W takich sytuacjach, proponujemy przedstawiać decydentowi **oszacowania od dołu** oraz **oszacowania od góry** na wartości współrzędnych ocen efektywnych zadanych parametrami użytej do skalaryzacji problemu MMIP metryki Czebyszewa.
- Bazą dla oszacowań są skończone zbiory, **szkielet dolny** i **szkielet górny**, których obrazy w przestrzeni ocen tworzą dwustronną aproksymację frontu Pareto.
- Wartości oszacowań od dołu i od góry dla każdej współrzędnej oceny efektywnej tworzą jej tzw. **interwałową reprezentację**.
- Gdy nie są znane dokładne wartości współrzędnych oceny efektywnej, decydent może w trakcie trwania procesu decyzyjnego dokonać ewaluacji takiej (nieznanej) oceny, bazując na jej interwałowej reprezentacji.
- Interwałowa reprezentacja ocen efektywnych może być narzędziem przydatnym, co najmniej, przy wykluczaniu przez decydenta fragmentów frontu Pareto, nie będących w polu jego zainteresowania.

Optymalizacja wielokryterialna

Problem optymalizacji wielokryterialnej, postać ogólna

$$vmax_{x \in X_0} f(x), \quad X_0 \in X,$$

gdzie:

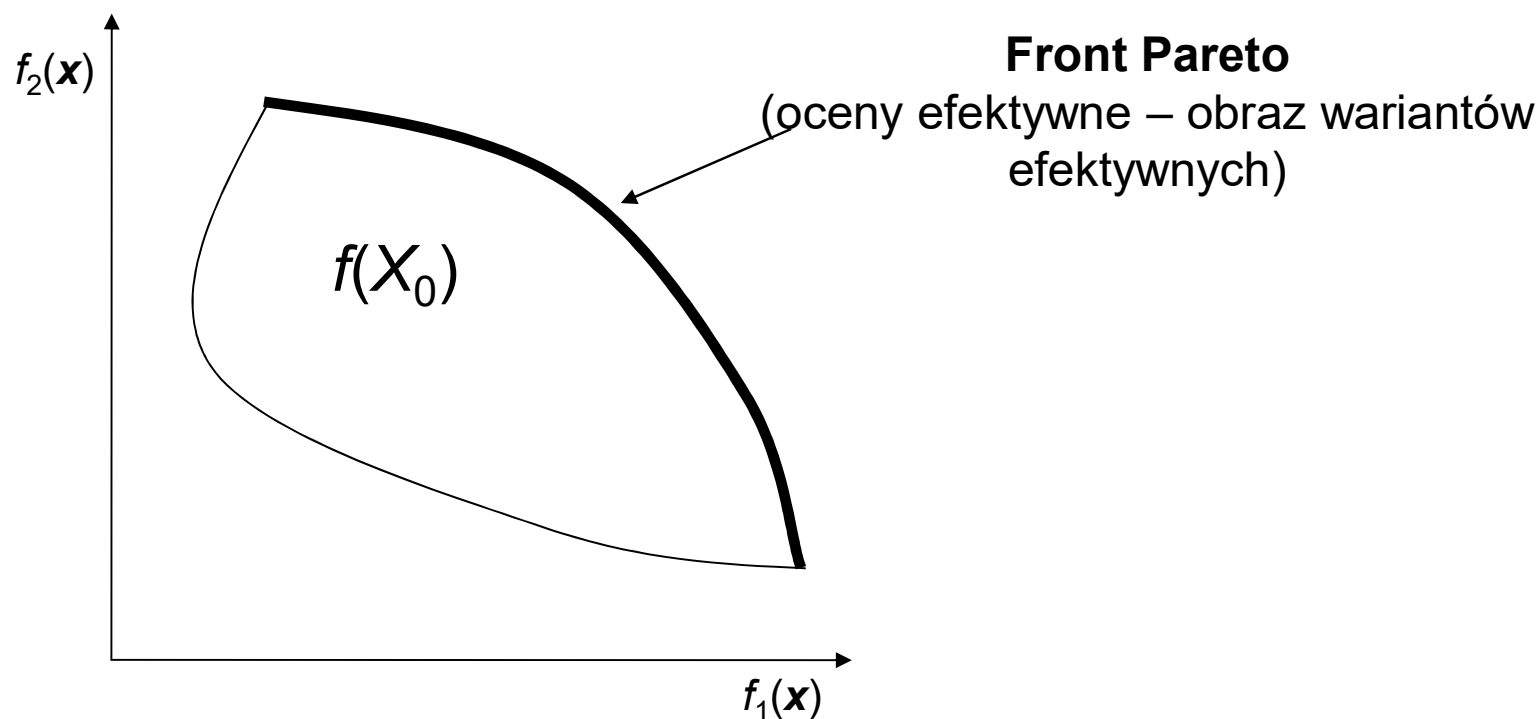
$$f: X \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad f = (f_1, \dots, f_k),$$

$$f_i: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, k, \quad k \geq 2,$$

***vmax* jest operatorem wyznaczania wariantów efektywnych (niezdominowanych w sensie relacji dominacji „ \preceq ”, w zbiorze X_0).**

Optymalizacja wielokryterialna

Rozwiązanie problemu optymalizacji wielokryterialnej

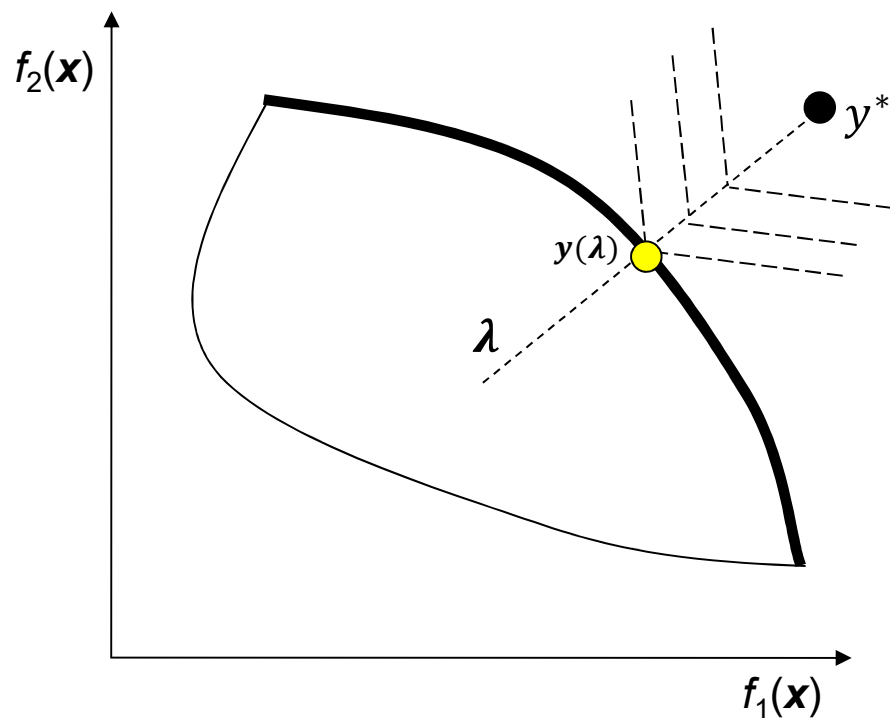


Przypadek "im więcej, tym lepiej"

W ogólnym wypadku front Pareto nie jest krzywą ciągłą i może zawierać tzw. oceny niepodparte – niemożliwe do wyznaczenia za pomocą skalaryzacji sumą ważoną funkcji kryterialnych.

Optymalizacja wielokryterialna

Wyznaczanie pojedynczego wariantu efektywnego



y^* – element idealny (zwykle nieosiągalny) lub jakiś element dominujący element idealny

Poprzez rozwiązanie skalarnego problemu $Cheb(\lambda, y^*, \rho)$:

$$\min_{x \in X_0} \max_i \lambda_i [(y_i^* - f_i(x)) + \rho e^k (y^* - f(x))]$$

gdzie:

$$\lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$\rho > 0,$$

$$e^k = (1, \dots, 1)$$

Technika skalaryzacji zmodyfikowaną metryką Czebyszewa i wektorami λ jako nośnikami preferencji decydenta, pozwala wyznaczyć wszystkie warianty (właściwie) efektywne.

Optymalizacja wielokryterialna

Jak wyznaczyć rozwiązanie problemu $Cheb(\lambda, \mathbf{y}^*, \rho)$ wykorzystując optymalizator MIP?

Transformacja problemu $Cheb(\lambda, \mathbf{y}^*, \rho)$ do postaci zadania MIP:

$$\min_{\mathbf{x} \in X_0} s$$

przy dodatkowych ograniczeniach:

$$s \geq \lambda_1 [(y_1^* - f_1(\mathbf{x})) + \rho e(\mathbf{y}^* - f(\mathbf{x}))],$$

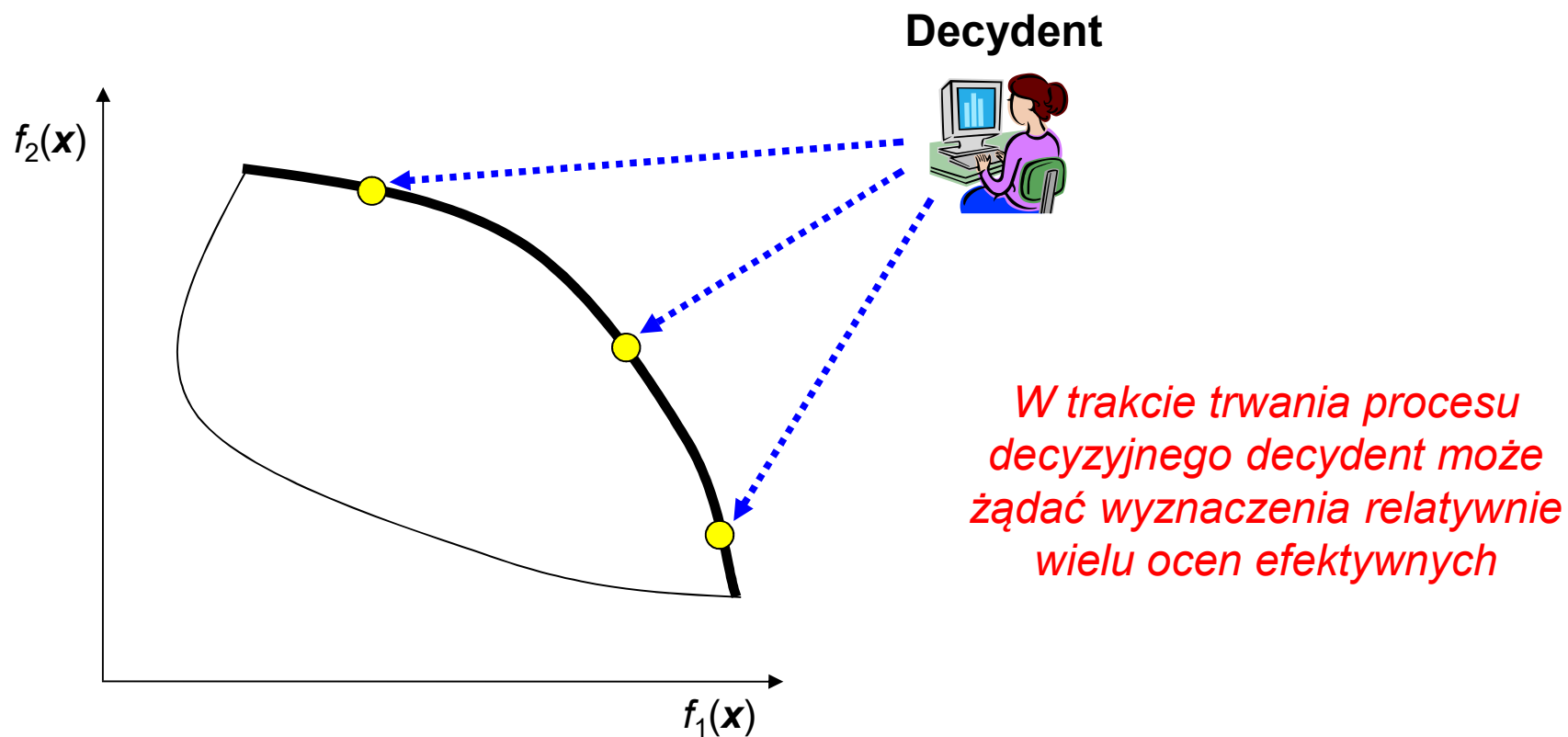
\vdots

$$s \geq \lambda_k [(y_k^* - f_k(\mathbf{x})) + \rho e(\mathbf{y}^* - f(\mathbf{x}))].$$

Poprzez dodanie zmiennej $s \in \mathbb{R}$ oraz k dodatkowych ograniczeń, związanych z metryką Czebyszewa. Powyższa, powszechnie znana, transformacja problemu *min-max* może być rozwiązana z wykorzystaniem optymalizatorów MIP.

Optymalizacja wielokryterialna

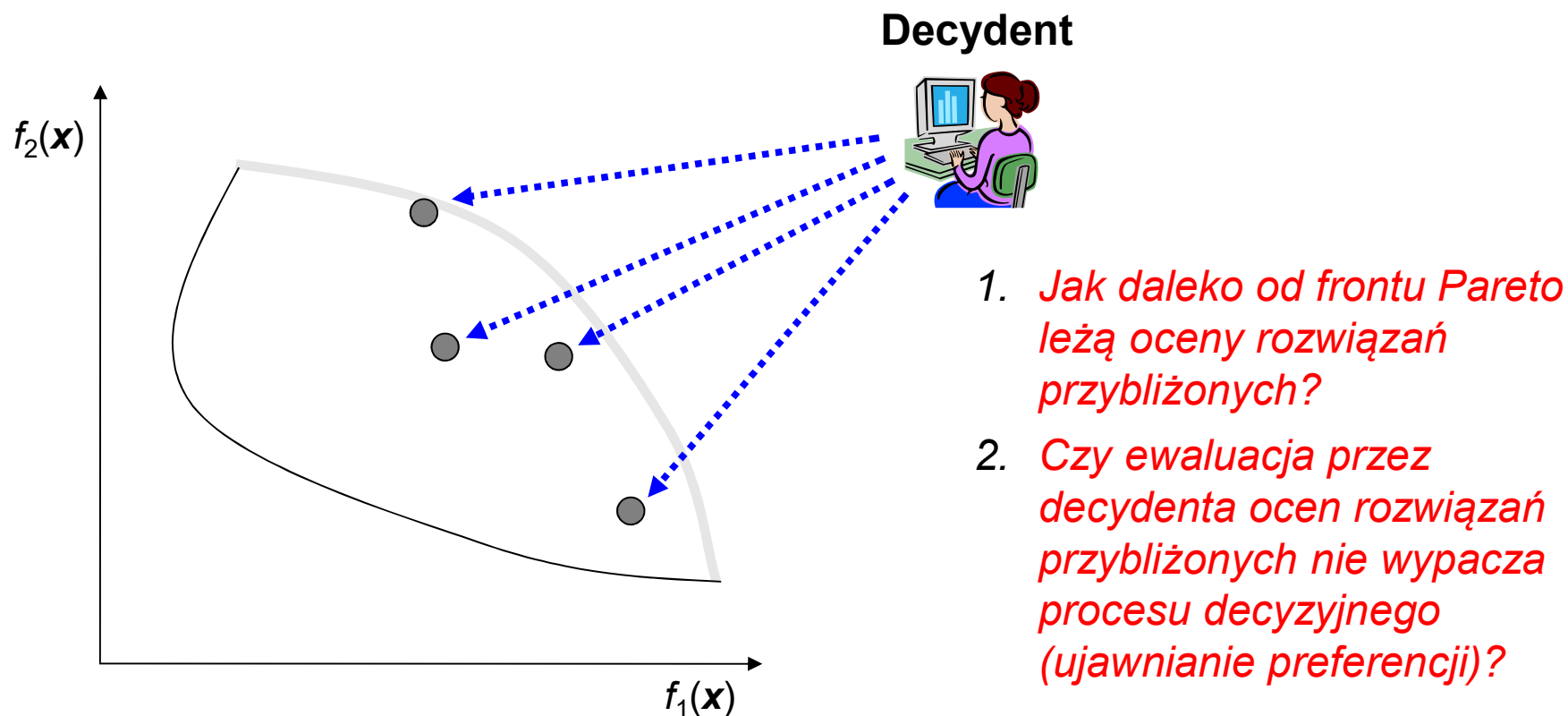
Optymalizacja dokładna dla zadań MMIP wielkiej skali



Wyznaczenie wielu ocen efektywnych może być kosztowne obliczeniowo. W takim wypadku można ulec pokusie wyznaczania, relatywnie niskim nakładem obliczeń, rozwiązań przybliżonych.

Optymalizacja wielokryterialna

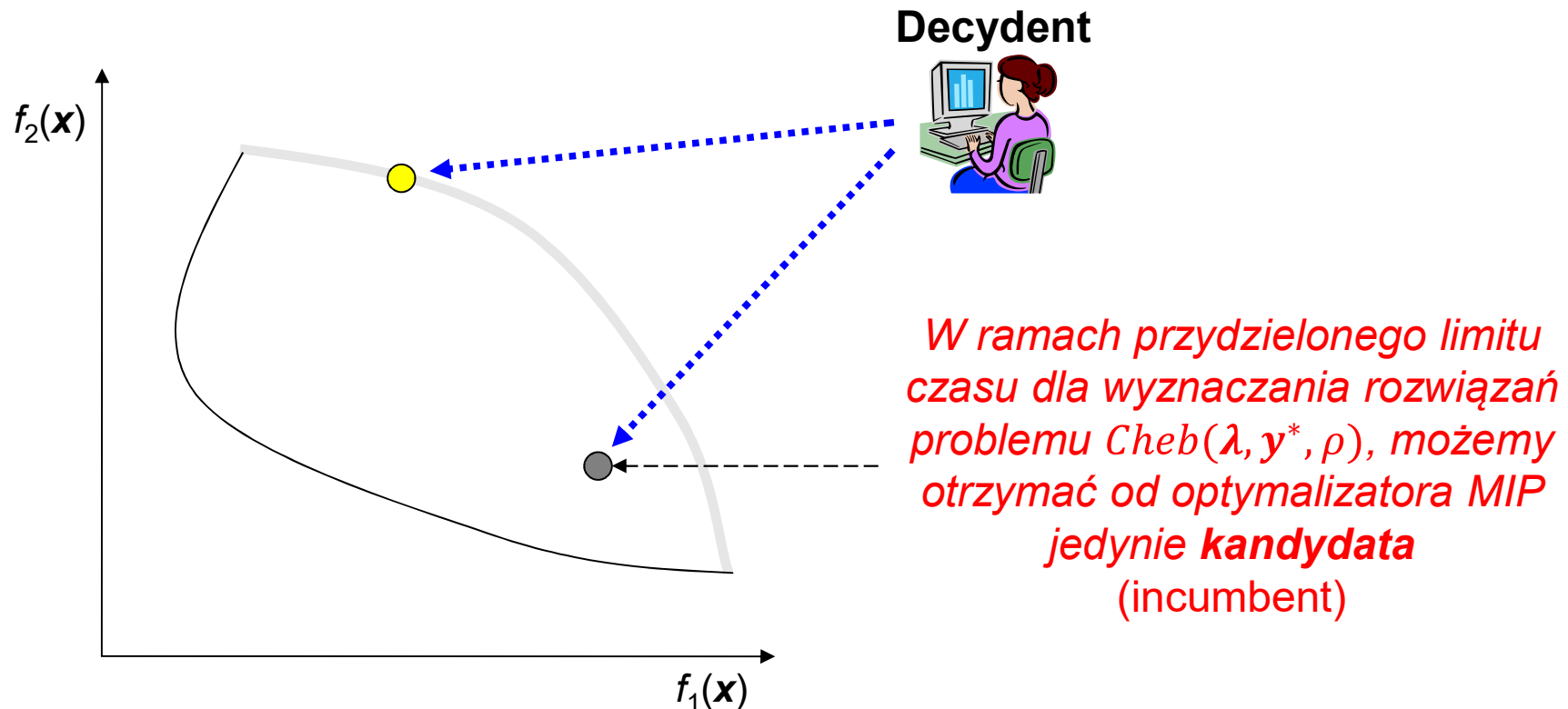
Optymalizacja przybliżona dla zadań MMIP wielkiej skali



Wszystkie metody przybliżone (np. metaheurystyki – obliczenia ewolucyjne, symulowane wyżarzanie, itp.) mają tę samą wadę – jakość wyznaczanych przez nie aproksymacji frontu Pareto można ocenić jedynie dla zadań testowych ze znanym frontem Pareto.

Optymalizacja wielokryterialna

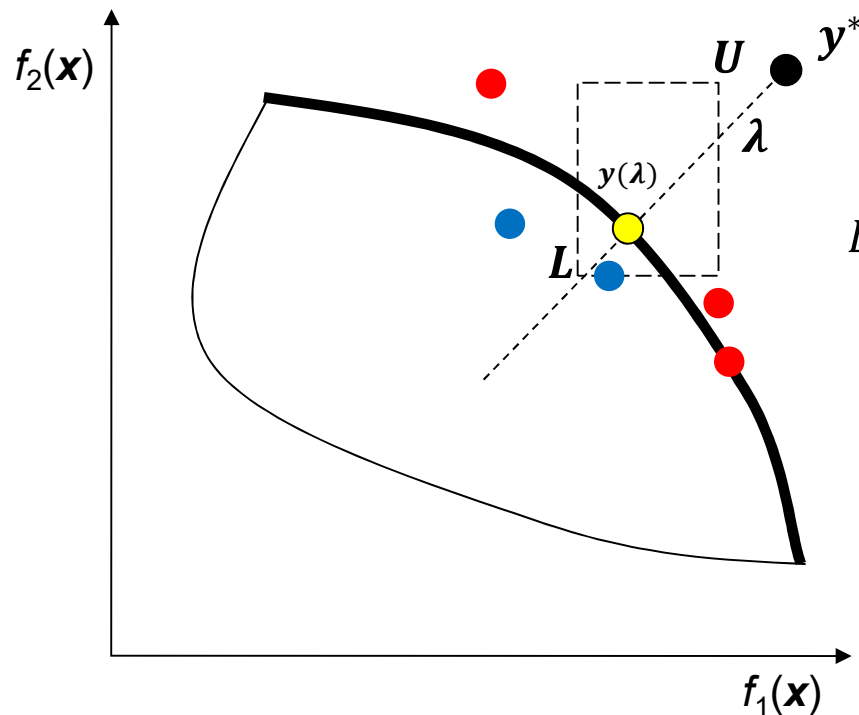
Optymalizacja dokładna dla zadań MMIP wielkiej skali z zadaniem limitem czasu obliczeń



W ramach przyjętego limitu czasu TL dla wyznaczania pojedynczego wariantu efektywnego, optymalizator MIP może zwrócić albo wariant efektywny albo najlepsze wyznaczone dotychczas rozwiązanie, spełniające wszystkie ograniczenia w rozpatrywanym problemie.

Oszacowania współrzędnych ocen efektywnych

Oszacowania od dołu i od góry na wartości współrzędnych oceny efektywnej zadanej wektorem wag λ



Dane są: **szkielet górny** S_U (każdy element tego zbioru nie jest zdominowany przez żaden wariant efektywny, elementy szkieletu górnego **mogą nie być dopuszczalne**), **szkielet dolny** S_L (elementy dopuszczalne), wektor wag λ ,

$$L_i(S_L, \lambda, y^*, \rho) \leq y_i(\lambda) \leq U_i(S_U, \lambda, y^*, \rho), \quad i = 1, \dots, k,$$

gdzie:

$y_i(\lambda)$ – współrzędne oceny efektywnej zadanej wektorem λ ,

L, U – wektory oszacowań od dołu i od góry oceny $y(\lambda)$ tworzące **interwałową reprezentację oceny efektywnej**

Relatywnie proste formuły dla L_i oraz U_i .

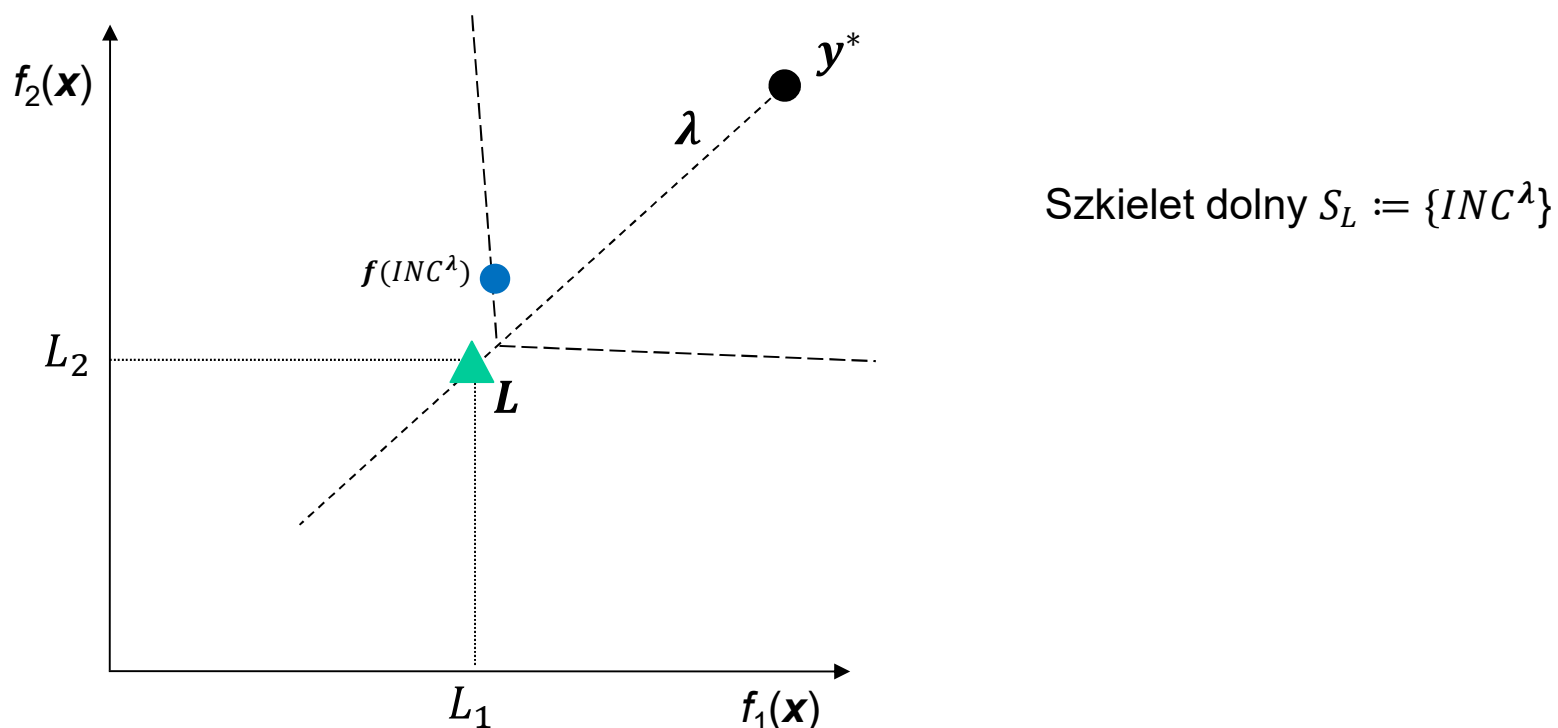
Kaliszewski I., Miroforidis J., *Probing the Pareto front of a large-scale multiobjective problem with a MIP solver*, Operational Research, 22, pp 5617–5673, 2022

Kaliszewski I., Miroforidis J., *Lower and upper bounds for the general multiobjective optimization problem*, AIP Conference Proceedings 2070, 020038, <https://doi.org/10.1063/1.5090005>, 2019.

Kaliszewski I., Miroforidis J., *On Upper Approximations of Pareto Fronts*, Journal of Global Optimization, 72(3), pp 475–490, 2018.

Oszacowania współrzędnych ocen efektywnych

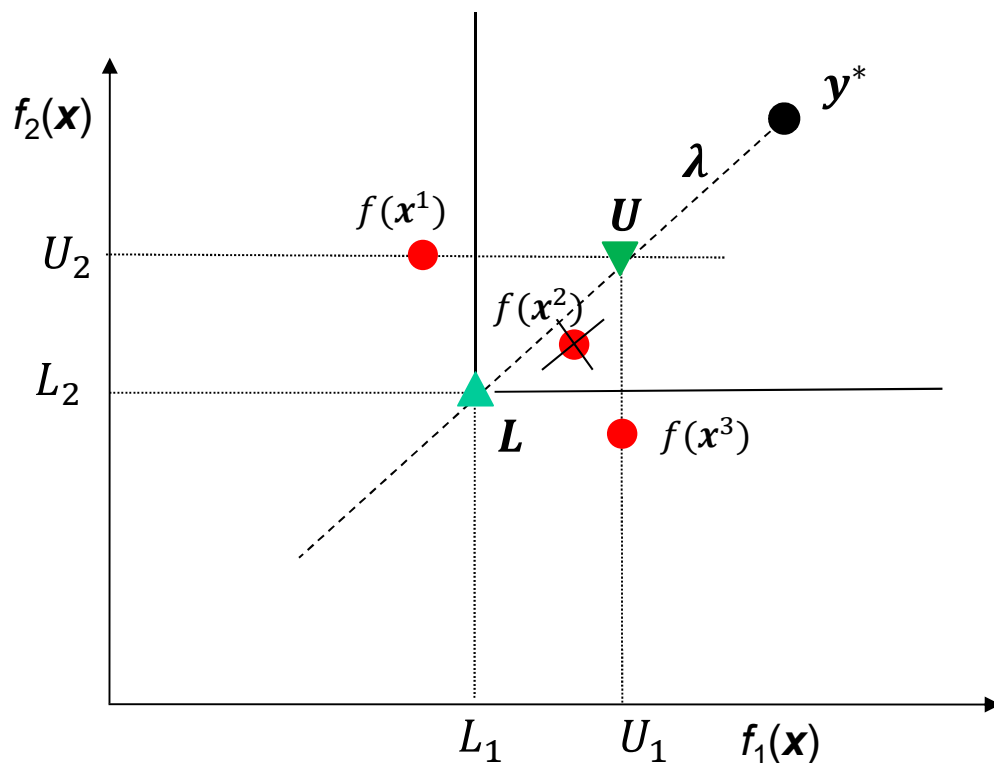
Oszacowania od dołu na wartości $y_l(\lambda)$



INC^λ – kandydat wyznaczony przez optymalizator MIP, będący przybliżonym rozwiązaniem problemu $Cheb(\lambda, y^*, \rho)$ w zadanym czasie TL , jest źródłem oszacowań od dołu na wartości $y_l(\lambda)$.

Oszacowania współrzędnych ocen efektywnych

Oszacowania od góry na wartości $y_l(\lambda)$



Szkielet górny $S_U := \{x^1, x^2, x^3\}$

x^1 jest źródłem oszacowania
 $U_2 := U_2(S_U, \lambda, y^*, \rho) = f_2(x^1)$

x^3 jest źródłem oszacowania
 $U_1 := U_1(S_U, \lambda, y^*, \rho) = f_1(x^1)$

x^2 nie jest źródłem oszacowań
ani dla U_1 ani dla U_2 !
($f_1(x^2) \geq L_1$ oraz $f_2(x^2) \geq L_2$)

Aby oceny elementów szkieletu górnego były źródłem oszacowań od góry, muszą być one odpowiednio położone w przestrzeni ocen względem wektora oszacowań od dołu (L).

Oszacowania współrzędnych ocen efektywnych

Kiedy element szkieletu górnego jest źródłem oszacowania od góry na wartości $y_{\bar{l}}(\lambda)$?

Lemat 1 (Kaliszewski, Miroforidis, 2019):

Dane są szkielet dolny S_L , szkielet górny S_U , wektor λ . Niech $x \in S_U$ oraz $L_{\bar{l}}(S_L, \lambda, \mathbf{y}^*, \rho) \leq f_{\bar{l}}(x)$ dla pewnego \bar{l} oraz $L_l(S_L, \lambda, \mathbf{y}^*, \rho) \geq f_l(x)$ dla $l = 1, \dots, k, l \neq \bar{l}$.

Wtedy x jest źródłem oszacowania od góry na wartości $y_{\bar{l}}(\lambda)$, czyli zachodzi $y_{\bar{l}}(\lambda) \leq f_{\bar{l}}(x)$.

Do wyznaczenia oszacowań od góry na wartości $y_l(\lambda)$, $l = 1, \dots, k$, potrzebować będziemy co najmniej k elementów szkieletu górnego, a więc „chmury” ocen elementów szkieletu górnego właściwie położonych (w sensie Lematu 1) względem wektora oszacowań od dołu L .

Jak, nie znając zbioru wariantów efektywnych, wyznaczać elementy szkieletu górnego, które nie są zdominowane przez żaden wariant efektywny?

Wyznaczanie elementów szkieletu górnego

Zastosowanie relaksacji problemu $Cheb(\lambda, y^*, \rho)$ do wyznaczania elementów szkieletu górnego

Podstawa teoretyczna

Lemat 2 (Kaliszewski, Miroforidis, 2022):

Dla danego λ , wariant efektywny x otrzymany przez rozwiązanie problemu $Cheb(\lambda, y^*, \rho)$ ze zbiorem dopuszczalnym $\tilde{X}_0 \supset X_0$ nie jest zdominowany przez wariant efektywny \bar{x} zadany wektorem $\bar{\lambda}$, będący rozwiązaniem problemu $Cheb(\bar{\lambda}, y^*, \rho)$ ze zbiorem dopuszczalnym X_0 .

Wyznaczanie elementów szkieletu górnego

Zastosowanie relaksacji problemu $Cheb(\lambda, \mathbf{y}^*, \rho)$ do wyznaczania elementów szkieletu górnego

Dwa sposoby

1. *Metoda z niejawną relaksacją*

Wyznaczanie **ocen** (te są nam potrzebne do wyznaczania wartości oszacowań od góry!) elementów szkieletu górnego na podstawie wartości najlepszego znanego oszacowania od dołu na wartości funkcji celu problemu $Cheb(\lambda, \mathbf{y}^*, \rho)$, dostarczonej przez optymalizator MIP w zadanym limicie czasu TL^U na wyznaczenie pojedynczej oceny szkieletu górnego. W czasie TL^U optymalizator nie znalazł rozwiązania optymalnego.

2. *Metoda z jawną relaksacją*

Wyznaczanie elementu szkieletu górnego przez rozwiązanie (do optymalności) relaksacji problemu $Cheb(\lambda, \mathbf{y}^*, \rho)$.

Oba sposoby zilustrujemy na podstawie wybranych przykładów MMIP wielkiej skali.

Problem pierwszy

Problem Markowitza z ograniczeniem kardynalności

- W obecnych czasach (globalizacja na rynkach finansowych) inwestorzy mają możliwość inwestowania nawet w tysiące instrumentów.
- Model Markowitza (1952) jest bazą dla wielu praktycznych zagadnień portfelowych (np. wielookresowy model Markowitza).
- Wprowadzenie limitu na liczbę instrumentów w portfelu jest racjonalne.
- Inwestorzy mają relatywnie łatwy dostęp do notowań giełdowych, co pozwala uzyskać dane, wymagane w modelu Markowitza.
- Model Markowitza może być wykorzystany do modelowania np. problemu wyboru portfolio projektów.

Problem Markowitza z ograniczeniem kardynalności

Ogólne sformułowanie problemu CCMP (*Cardinality Constrained Markowitz Problem*)

$$f_1(\mathbf{x}) := -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} \quad (\text{ujemna wariancja portfela – miara ryzyka}) \rightarrow \mathbf{MAX}$$

$$f_2(\mathbf{x}) := \mathbf{e}^T \mathbf{x} \quad (\text{oczekiwany zwrot portfela}) \rightarrow \mathbf{MAX}$$

p.o.:

$$\mathbf{x} \in X_0 := \left\{ \mathbf{x} \left| \begin{array}{l} \mathbf{u}^T \mathbf{x} = \mathbf{1}, \\ \text{card}(\mathbf{x}) \leq C, \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \right\}$$

gdzie:

$\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, a x_i jest ułamkiem kapitału zainwestowanego w i -ty instrument, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest macierzą kowariancji, $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem zwrotów instrumentów, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem jednostkowym, C jest ograniczeniem od góry na liczbę instrumentów w portfelu.

Wyznaczanie portfeli efektywnych

Problem CCMP może być modelowany jako dwukryteriowy problem programowania kwadratowego całkowitoliczbowego (MIQP)

Transformacja problemu $Cheb(\lambda, \mathbf{y}^*, \rho)$ dla zadania CCMP, wymagana przez pakiet MIP:

$$\min_{\mathbf{x} \in X_0} s$$

p.o.:

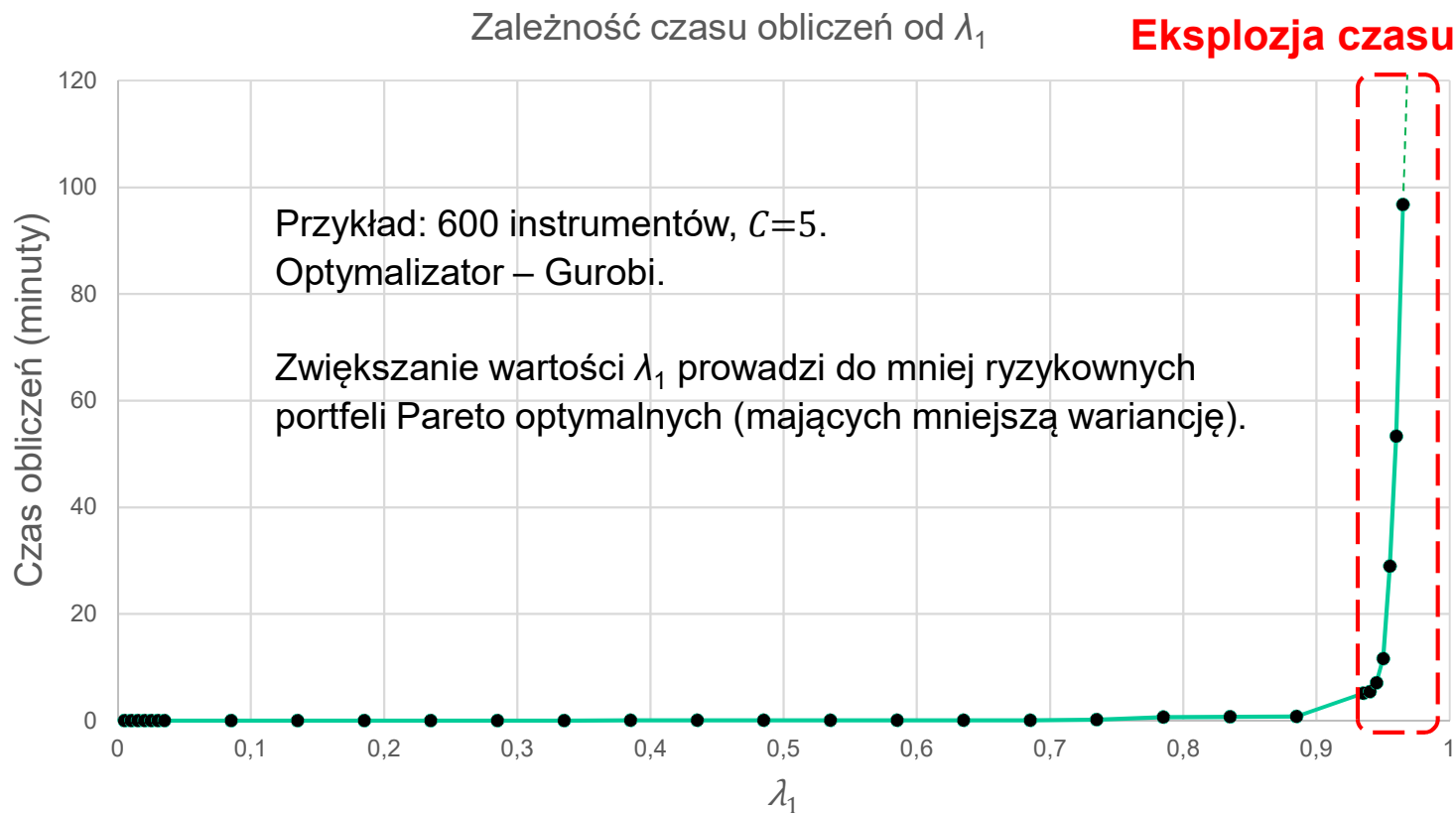
$$s \geq \lambda_1 [(y_1^* - f_1(\mathbf{x})) + \rho \mathbf{e}(\mathbf{y}^* - f(\mathbf{x}))],$$

$$s \geq \lambda_2 [(y_2^* - f_2(\mathbf{x})) + \rho \mathbf{e}(\mathbf{y}^* - f(\mathbf{x}))].$$

Przez wprowadzenie: zmiennej $s \in \mathbb{R}$, dwóch dodatkowych ograniczeń oraz n zmiennych binarnych (aby opisać ograniczenie kardynalności $card(\mathbf{x}) \leq C$), problem $Cheb(\lambda, \mathbf{y}^*, \rho)$, dla potrzeb wyznaczania portfeli efektywnych w problemie CCMP, jest problemem klasy MIQP (tu: liniowa funkcja celu i ograniczenia kwadratowe).

Wyznaczanie portfeli efektywnych

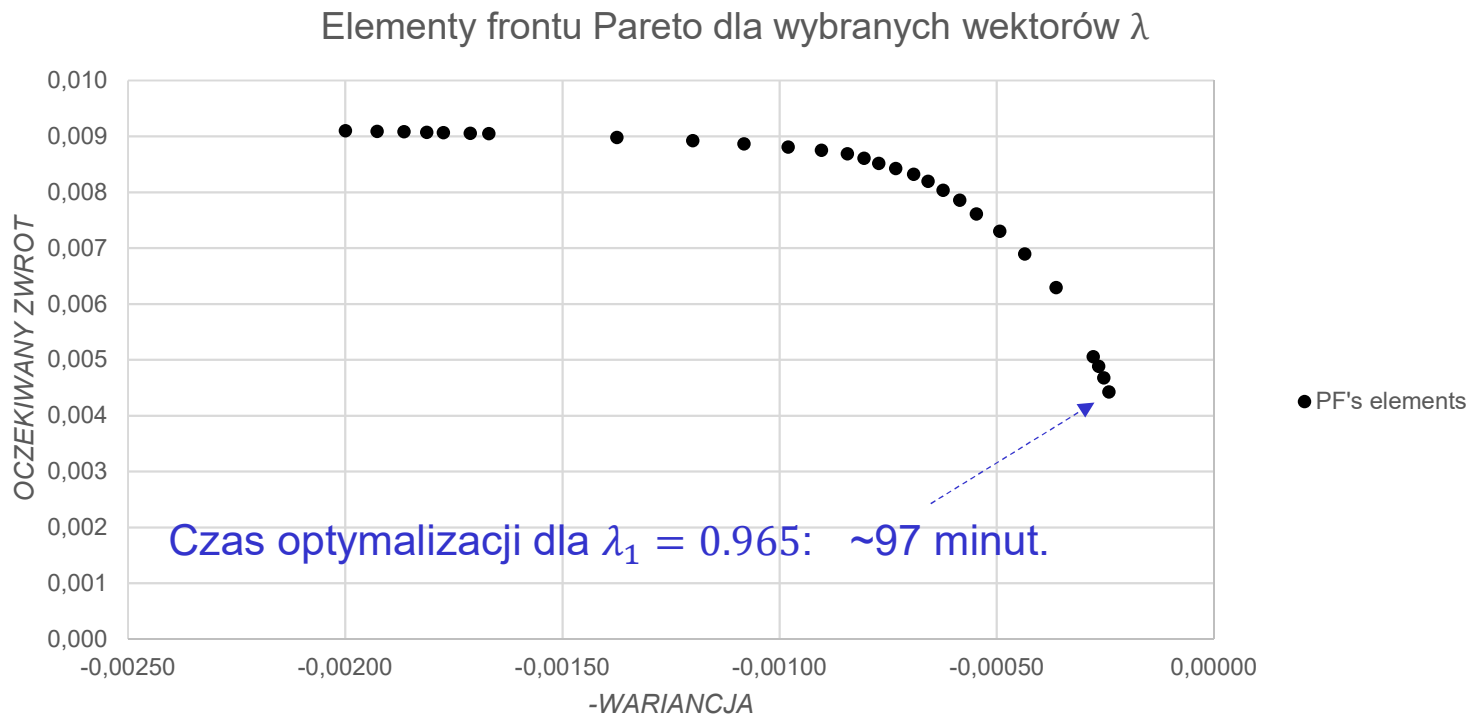
Rozwiązywanie problemu $Cheb(\lambda, y^*, \rho)$ w wielkoskalowych problemach CCMP



Wyznaczanie portfeli efektywnych o małym ryzyku ($\lambda_1 \gg \lambda_2$) wymagać może długiego czasu obliczeń dla relatywnie małych wartości C – **bariera** w metodach interaktywnych wielokryterialnego podejmowania decyzji.

Wyznaczanie portfeli efektywnych

Rozwiązywanie problemu $Cheb(\lambda, y^*, \rho)$ w wielkoskalowych problemach CCMP



Ale dla $\lambda = (0.97, 0.03)$ optymalizator Gurobi nie rozwiązał problemu $Cheb(\lambda, y^*, \rho)$ w czasie **3 godzin**. Dostarczył on jednak: (1) *kandydata*, (2) najlepsze wyznaczone ograniczenie od dołu (*best bound*) na wartości funkcji celu w tym problemie.

Czy możemy wykorzystać te dane dla potrzeb wyznaczania wartości oszacowań od dołu i od góry?

Oszacowania ocen efektywnych

Wyznaczanie elementów szkieletu górnego

- Gdy optymalizator nie wyznacza rozwiązania problemu $Cheb(\lambda, \mathbf{y}^*, \rho)$ w założonym czasie TL^U , otrzymujemy kandydata INC^λ oraz najlepsze ograniczenie od dołu B^λ na wartości funkcji celu w problemie $Cheb(\lambda, \mathbf{y}^*, \rho)$.

- Uwzględniając powyższe i rozwiązując układ równań:

$$\begin{aligned} B^\lambda &= \lambda_1 [(y_1^* - f_1^{B^\lambda}) + \rho e (\mathbf{y}^* - \mathbf{f}^{B^\lambda})] \\ B^\lambda &= \lambda_2 [(y_2^* - f_2^{B^\lambda}) + \rho e (\mathbf{y}^* - \mathbf{f}^{B^\lambda})] \end{aligned} \quad (BB)$$

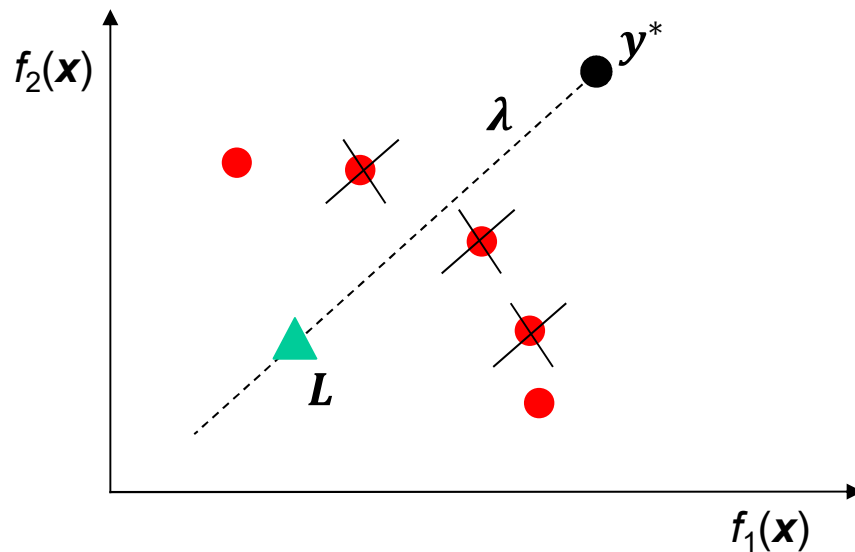
wyznaczamy element $(f_1^{B^\lambda}, f_2^{B^\lambda}) := \mathbf{f}^{B^\lambda}$.

- **Lemat 3:** Element $\mathbf{x}^{B^\lambda} \in \mathbb{R}^n$, dla którego zachodzi $(f_1(\mathbf{x}^{B^\lambda}), f_2(\mathbf{x}^{B^\lambda})) = (f_1^{B^\lambda}, f_2^{B^\lambda})$ jest elementem szkieletu górnego $\{\mathbf{x}^{B^\lambda}\}$.
- **Uwaga:** Element \mathbf{x}^{B^λ} nie jest źródłem ani dla U_1 ani dla U_2 ponieważ zachodzi warunek $f_1(\mathbf{x}^{B^\lambda}) \geq L_1(\{INC^\lambda\}, \lambda, \mathbf{y}^*, \rho)$ i $f_2(\mathbf{x}^{B^\lambda}) \geq L_2(\{INC^\lambda\}, \lambda, \mathbf{y}^*, \rho)$. Element \mathbf{f}^{B^λ} nie jest odpowiednio położony względem wektora L , aby być źródłem oszacowań od góry (Lemat 1).

Oszacowania ocen efektywnych

Wyznaczanie elementów szkieletu górnego

- Gdy problem $Cheb(\tilde{\lambda}, y^*, \rho)$, $\lambda \neq \tilde{\lambda}$ ($\tilde{\lambda}$ jest bliskie λ) **został rozwiązany** w czasie TL^U , rozwiązanie to jest elementem szkieletu górnego, który może być źródłem oszacowań U_1 lub U_2 (o ile spełnia warunki Lematu 1).
- Gdy problem $Cheb(\tilde{\lambda}, y^*, \rho)$, $\lambda \neq \tilde{\lambda}$ ($\tilde{\lambda}$ jest bliskie λ) **nie został rozwiązany** w czasie TL^U , można wyznaczyć ocenę elementu szkieletu górnego, która może być źródłem oszacowań U_1 lub U_2 (o ile spełnia warunki Lematu 1), rozwiązując układ równań (BB) z wartością $B^{\tilde{\lambda}}$.



To podejście zostało po raz pierwszy użyte do wyznaczania oszacowań ocen efektywnych w instancjach dwukryteriowego wielowymiarowego zagadnienia załadunku wielkiej skali.

Przykłady numeryczne

Dane testowe i ustawienia

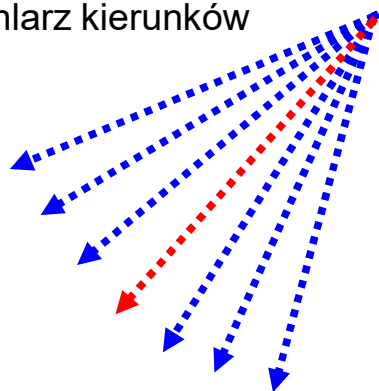
- Zestaw danych: NYSE, **600** instrumentów. (Dzięki uprzejmości I. Kaliszewskiego, P. Juszczyka, D. Podkopaev'a, IBS PAN)
- Ograniczenie kardynalności: $card(x) \leq 5 \ll 600$.
- $y^* = (0, 0.00911)$ przyjęte bez wyznaczania elementu idealnego. 0.00911 to największa wartość zwrotu spośród wszystkich instrumentów – instrument o tym zwrocie należy do zbioru portfeli efektywnych. 0 jest przyjętym, na podstawie wiedzy o problemie, ograniczeniem od góry na wartości –*WARIANCJA*.
- $\rho = 0.001$.
- Optymalizator MIP: Gurobi 8.1.1 dla Windows 10 (x64).
- Sprzęt: CPU Intel Core i7-7700HQ, 16 GB RAM.

Przykłady numeryczne

Eksperyment 1, $\lambda = (0.95, 0.05)$

- Limit czasu dla wyznaczenia kandydata (jednoelementowy szkielet dolny): $TL = 300$ s.
- Limit czasu dla wyznaczenia pojedynczego elementu szkieletu górnego: $TL^U = 300$ s.
- Zbiór wektorów λ dla potrzeb wyznaczenia szkieletu górnego:

Wachlarz kierunków

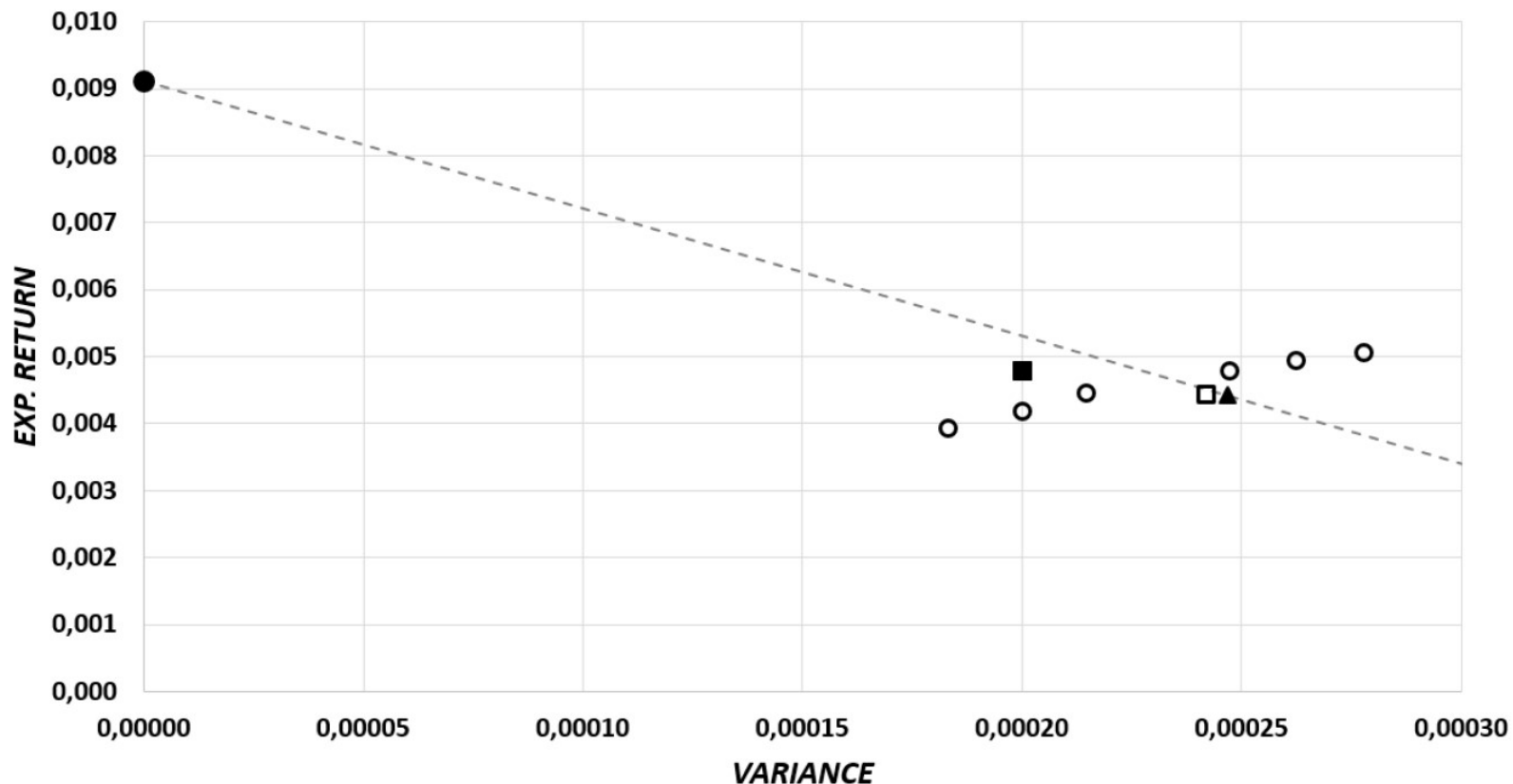


λ_1	λ_2
0.935	0.065
0.94	0.06
0.945	0.055
0.955	0.045
0.96	0.04
0.965	0.035

- Całkowity czas optymalizacji: $300 + 6 * 300 = 2100$ s.

Przykłady numeryczne

Eksperyment 1, $\lambda = (0.95, 0.05)$



Sprawdzono, że czas wyznaczenia dokładnego rozwiązania to ~ 733 s, a **2100** s to czas wyznaczenia szkieletów. NIC NIE UGRALIŚMY!

Przejdźmy do wyznaczania portfeli efektywnych o mniejszym ryzyku.

Przykłady numeryczne

Eksperyment 2, $\lambda = (0.98, 0.02)$

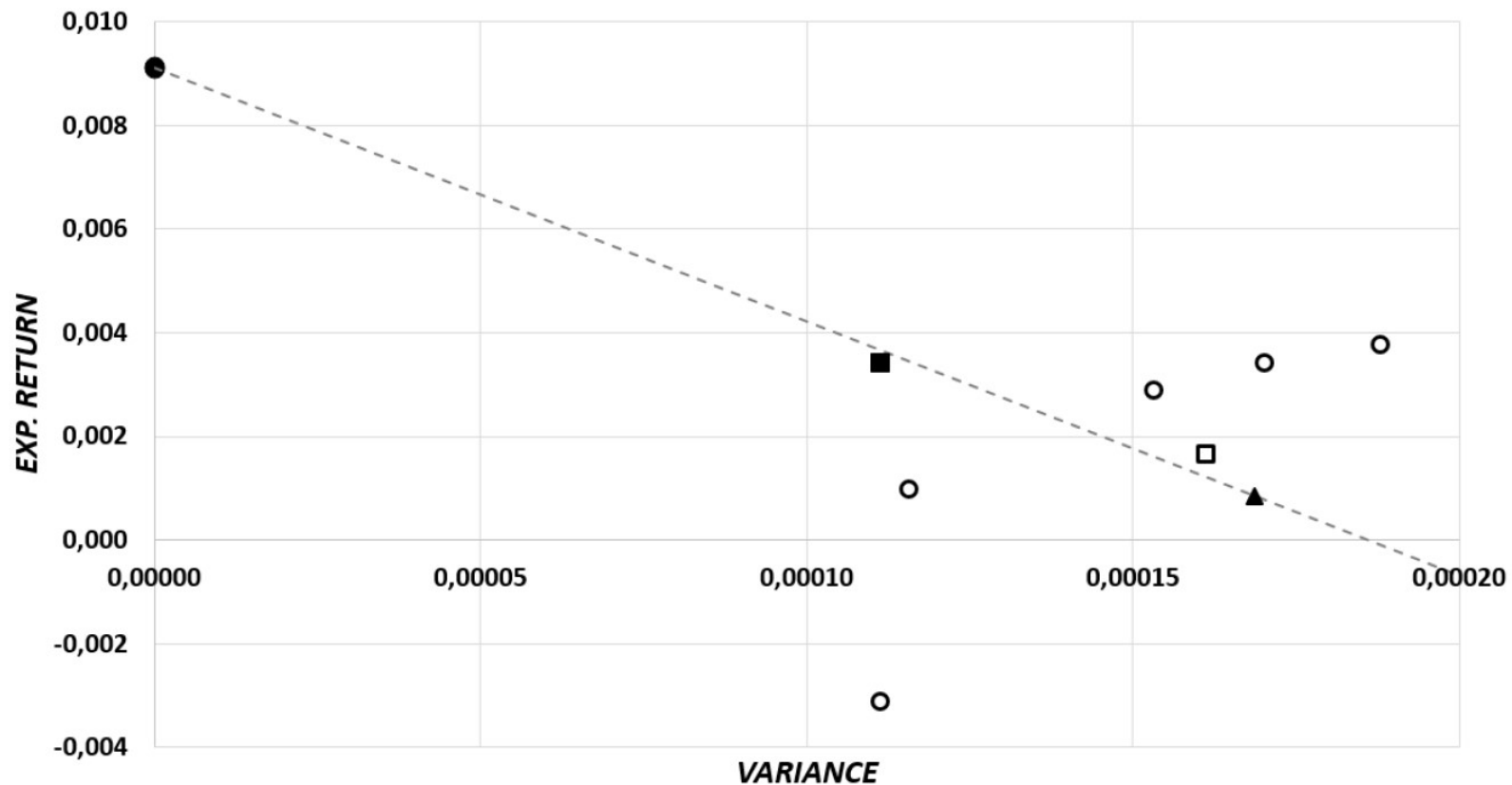
- Limit czasu dla wyznaczenia kandydata (jednoelementowy szkielet dolny):
 $TL = 1200$ s.
- Limit czasu dla wyznaczenia pojedynczego elementu szkieletu górnego: $TL^U = 600$ s.
- Zbiór wektorów λ dla potrzeb wyznaczenia szkieletu górnego:

λ_1	λ_2
0.965	0.035
0.970	0.030
0.975	0.025
0.985	0.015
0.990	0.010

- Całkowity czas optymalizacji : $1200 + 5 * 600 = 4200$ s.

Przykłady numeryczne

Eksperyment 2, $\lambda = (0.98, 0.02)$



Sprawdzono, że GUROBI nie rozwiązał zadania w czasie ~7500 s (osiągnął MIP GAP% = 5.78%), a 4200 s to czas wyznaczenia szkieletów dolnych i górnych. COS' UGRALIŚMY!

Przykłady numeryczne

Eksperyment 3, $\lambda = (0.97, 0.03)$

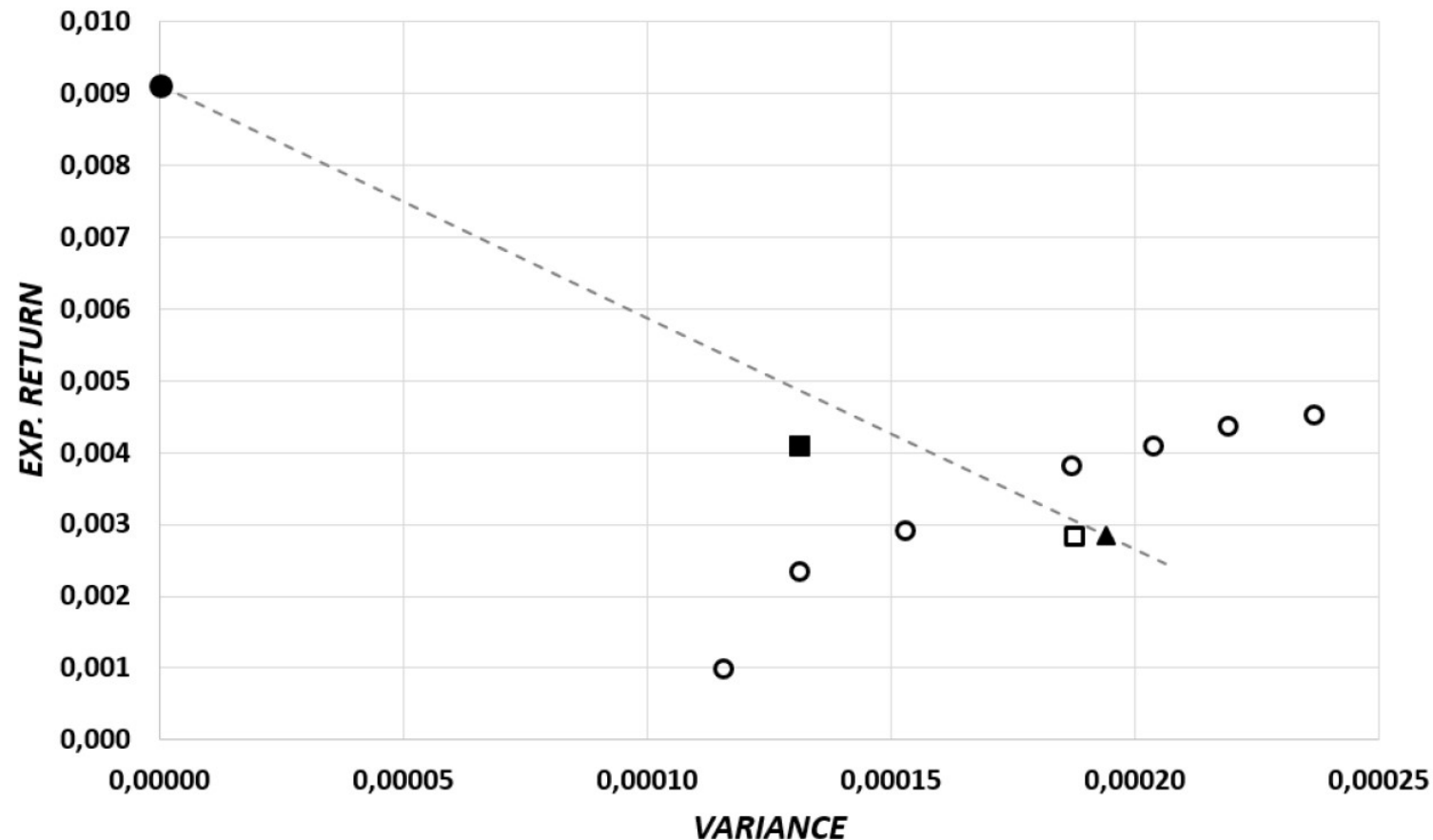
- Limit czasu dla wyznaczenia kandydata (jednoelementowy szkielet dolny):
 $TL = 1200$ s.
- Limit czasu dla wyznaczenia pojedynczego elementu szkieletu górnego: $TL^U = 600$ s.
- Zbiór wektorów λ dla potrzeb wyznaczenia szkieletu górnego:

λ_1	λ_2
0.950	0.050
0.955	0.045
0.960	0.040
0.965	0.035
0.975	0.025
0.980	0.020
0.985	0.015

- Całkowity czas optymalizacji : $1200 + 5 * 600 = 4200$ s.

Przykłady numeryczne

Eksperyment 3, $\lambda = (0.97, 0.03)$



Sprawdzono, że GUROBI nie rozwiązał zadania w czasie **10000** s (osiągnął MIP GAP% = 1.18%),
a **4200** s to czas wyznaczenia szkieletów dolnych i górnych. COŚ UGRALIŚMY!

Problem Markowitz'a

Wykorzystanie czysto technicznej informacji od optymalizatora do wyznaczania elementów szkieletu górnego

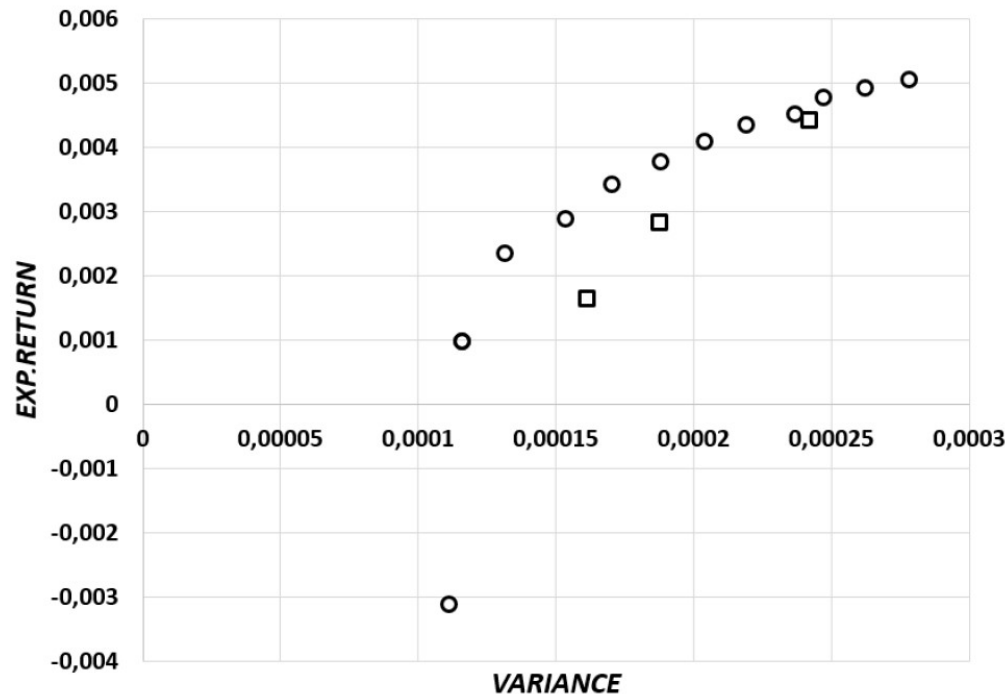
Fragment dziennika GUROBI gdy rozwiązywał on problem $Cheb(\lambda, y^*, \rho)$ w eksperymencie nr 2:

```
...
...
MIP GAP%
27710 8445 0.00015 39 141 0.00016 0.00015 6.14% 0.4 6788s
28489 8562 0.00015 32 144 0.00016 0.00015 6.10% 0.4 6955s
29235 8720 0.00015 39 96 0.00016 0.00015 5.91% 0.4 7132s
30034 8879 0.00015 23 69 0.00016 0.00015 5.83% 0.4 7293s
30802 8954 cutoff 58 0.00016 0.00015 5.78% 0.4 STOP, LIMIT CZASU
```

Czysto techniczna dla decydenta informacja (MIP Best Bound, MIP GAP%) nie jest użyteczna dla decydenta, ale wartości oszacowań współrzędnych ocen efektywnych taką informacją już są.

Budowanie bazy obliczeniowej dla oszacowań

Poprzez odkładanie w bazie danych szkieletów dolnych i górnych ...



$$\lambda = (0.975, 0.025)$$

$$0.0001911 \geq \text{Wariancja} \geq 0.0001157$$
$$0.0016580 \leq \text{Zwrot} \leq 0.0040999$$

... można je wykorzystywać do wyznaczania oszacowań ocen innych portfeli efektywnych zadanych innymi wektorami wag. W przypadku zadań dwukryteriowych i trzykryteriowych można wyobrazić sobie, na podstawie szkieletów, przebieg frontu Pareto.

Komentarz

- Przedstawione podejście wymaga określenia schematu wyboru wektorów „bliskich” wektorowi λ , potrzebnych do wyznaczenia szkieletu górnego. W podanych przykładach zostały one wybrane arbitralnie, kierując się założeniami z Lematu 1 (wachlarz wektorów λ). Nie jest to gotowy system wspomagania decyzyjnego.
- Poprawa oszacowań jest możliwa poprzez wyznaczanie nowych elementów szkieletów (dodatkowe obliczenia optymalizacyjne, które mogą wymagać zmiany limitu czasu obliczeń). Kompromis „czas obliczeń”–”dokładność oszacowań”.

Problem drugi

Trzykryteriowe wielowymiarowe zagadnienie załadunku

- Wiele praktycznych problemów przyjmuje postać klasycznego zagadnienia załadunku, na przykład zagadnienia: pakowania kontenerów; zarządzania jakością usług w sieciach komputerowych.
- Naturalne wydaje się jednak rozpatrywanie więcej niż jednego wskaźnika jakości załadunku.

Trzykryteriowe wielowymiarowe zagadnienie załadunku

Ogólne sformułowanie problemu

$$f_1(\mathbf{x}) := \mathbf{c}_1^T \mathbf{x} \quad \rightarrow \mathbf{MAX}$$

$$f_2(\mathbf{x}) := \mathbf{c}_2^T \mathbf{x} \quad \rightarrow \mathbf{MAX}$$

$$f_3(\mathbf{x}) := \mathbf{c}_3^T \mathbf{x} \quad \rightarrow \mathbf{MAX}$$

p.o.:

$$\mathbf{x} \in X_0 := \left\{ \mathbf{x} \mid \begin{array}{l} \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i, i = 1, \dots, m, \\ \mathbf{x} \in \{0,1\}^n \end{array} \right\}$$

gdzie:

$a_{i,j} \geq 0, c_{k,j} \geq 0$. Trzy wskaźniki jakości załadunku, m ograniczeń zasobowych.

Przez zastąpienie ograniczenia $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ ograniczeniami $x_j \in \mathbb{Z}_+, L_j \leq x_j \leq U_j$, otrzymujemy całkowitoliczbowy liniowy problem optymalizacji wielokryterialnej.

Wyznaczanie elementów szkieletu dolnego

Wyznaczanie kandydatów przez rozwiązanie problemu skalarnego $Cheb(\lambda, \mathbf{y}^*, \rho)$ w zadanym limicie czasu

- Nie jest wyznaczany element idealny. Składowe wektora \mathbf{y}^* stanowią wartości najlepszych ograniczeń od dołu (MIP *best bounds*) na wartości trzech funkcji celu $f_i(x)$, wyznaczonych przez optymalizator w czasie TL ($TL/3$ na jedną funkcję celu).
- Element szkieletu dolnego otrzymujemy poprzez wyznaczenie kandydata problemu $Cheb(\lambda, \mathbf{y}^*, \rho)$ w zadanym limicie czasu TL .

Wyznaczanie elementów szkieletu górnego

Wyznaczanie rozwiązań zrelaksowanego problemu $Cheb(\lambda, \mathbf{y}^*, \rho)$

Element szkieletu górnego wyznaczamy rozwiązując (do optymalności) zrelaksowany problem $Cheb(\lambda, \mathbf{y}^*, \rho)$. Przyjęta tu relaksacja z tzw. ograniczeniami zastępczymi (*surrogate relaxation*) problemu polega na dodaniu stronami wszystkich m ograniczeń zasobowych zagadnienia załadunku:

$$\tilde{X}_0 := \left\{ \mathbf{x} \mid \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq \sum_{i=1}^m b_i, \\ \mathbf{x} \in \{0,1\}^n \end{array} \right\}, \tilde{X}_0 \supseteq X_0$$

(Jest to relaksacja, w której wszystkie mnożniki m funkcji ograniczeń są sobie równe.)

Na mocy Lematu 2, tak wyznaczone rozwiązania są elementami szkieletu górnego.

Pamiętajmy, że tylko te elementy szkieletu górnego, które spełniają założenia Lematu 1 mogą być źródłem oszacowań od góry na wartości zadanej współrzędnej oceny efektywnej.

Wyznaczanie elementów szkieletu górnego

Wyznaczanie rozwiązań zrelaksowanego problemu $Cheb(\lambda, y^*, \rho)$

Ta metoda ma praktyczne zastosowanie tylko wtedy, gdy problem zrelaksowany rozwiązywany jest relatywnie szybko w stosunku do limitu czasu TL .

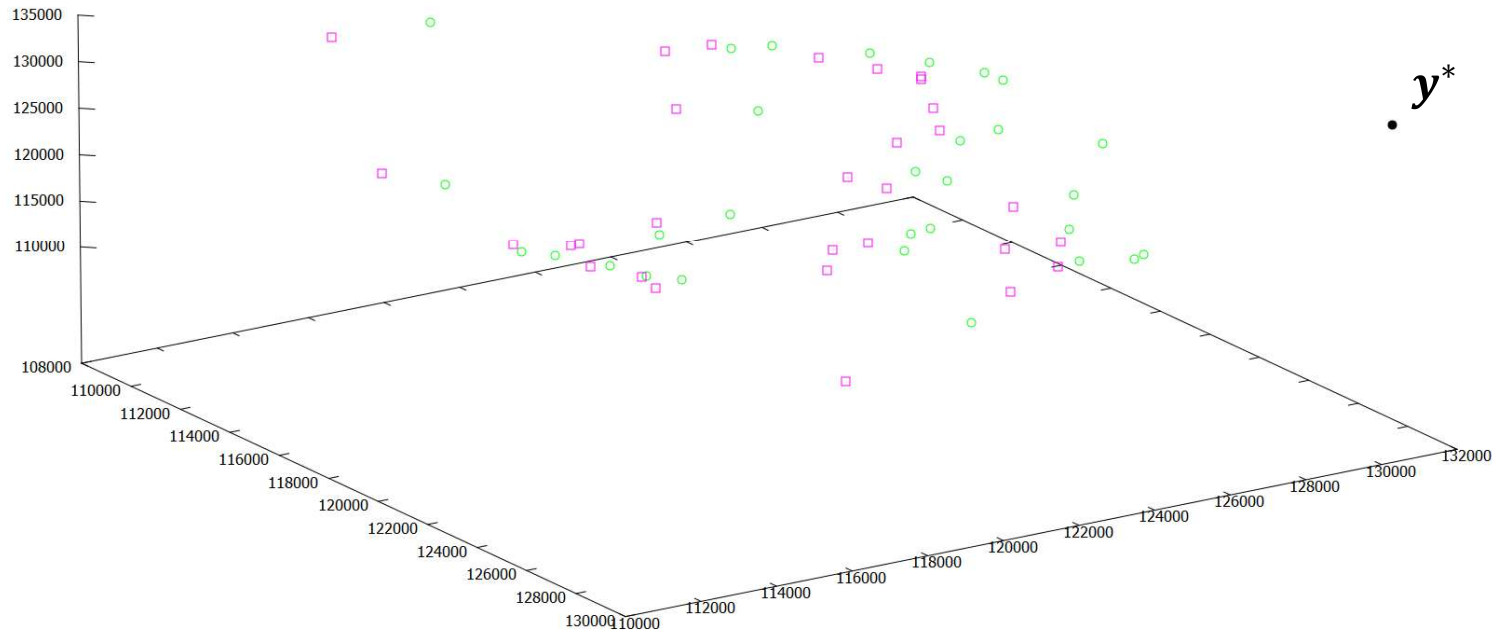
Przykład numeryczny

Dane testowe i ustawienia

- Zestaw danych: Beasley OR-Library, zadanie 1 z grupy 6, $n = 500$, $m = 10$ – wielowymiarowe zagadnienie załadunku.
- 3 funkcje celu.
- $TL = 1200$ s.
- $\rho = 0.001$.
- $\mathbf{y}^* = (128874, 131113, 131732)$. Czas obliczeń: TL .
- Optymalizator MIP: Gurobi 9.1.1 dla Windows 10 (x64).
- Sprzęt: CPU Intel Core i7-7700HQ, 16 GB RAM.

Przykład numeryczny

Eksperyment 1, zadanych 30 wektorów λ



INC. MIPGAPs (%)
3,142
2,830
3,988
2,683
35,268
2,765
2,424
2,916
2,943
2,660
2,756
2,656
2,710
2,220
1,973
2,500
3,376
2,549
2,728
4,341
3,750
2,800
3,481
3,350
3,137
2,663
2,975
3,101
2,314
3,224

Obraz szkielet dolnego wyznaczonego w czasie $30 * TL = 10 h$. Obraz szkieletu górnego wyznaczonego w czasie ~47 sekund.

Przykład numeryczny

Eksperyment 1, Oszacowania od dołu i od góry dla 10. pierwszych wektorów λ uzyskane na podstawie otrzymanych szkieletów

Wektory oszacowań od dołu			Wektory oszacowań od góry			G_P_sub%		
89859,179	115426,629	129977,008	119369	131113	131732	22,898%	11,964%	1,332%
121360,268	125828,446	117736,643	128874	131032	123897	5,830%	3,969%	4,676%
127632,030	117128,740	113481,356	128874	128614	124555	0,964%	8,760%	8,406%
118727,434	124509,297	122705,510	127948	128496	126957	7,155%	3,041%	3,227%
98161,250	130864,565	90781,667	128874	131113	131732	23,832%	0,189%	31,086%
124606,524	123573,339	114506,350	128874	127655	123884	3,311%	3,113%	7,119%
109112,804	123927,111	125203,748	121789	131113	131732	9,836%	5,481%	4,956%
110400,490	126510,714	122495,245	124276	131113	130274	10,767%	3,510%	5,905%
117601,336	126214,632	121280,826	124276	129867	126074	5,179%	2,786%	3,639%
120706,379	121914,515	123517,168	124637	126949	127339	3,050%	3,840%	2,901%

Gdzie:

$$G_{P_{sub};l}\% := 100\% * \frac{U_l(S_U, \lambda) - L_l(S_L, \lambda)}{y_l^*}, \quad l = 1,2,3.$$

Przykład numeryczny

Eksperyment 2, wykorzystanie optymalizatora CoreMCBB do wyznaczania szkieletu dolnego i szkieletu górnego

Do wyznaczenia aproksymacji **całego** frontu Pareto został wykorzystany program CoreMCBB, w którym zaimplementowano wariant wielokryterialnego algorytmu „branch & bound” (MCBB) dla potrzeb rozwiązywania wielokryterialnych wielowymiarowych zagadnień załadunku. Algorytm nie daje gwarancji wyznaczenia wariantów efektywnych.

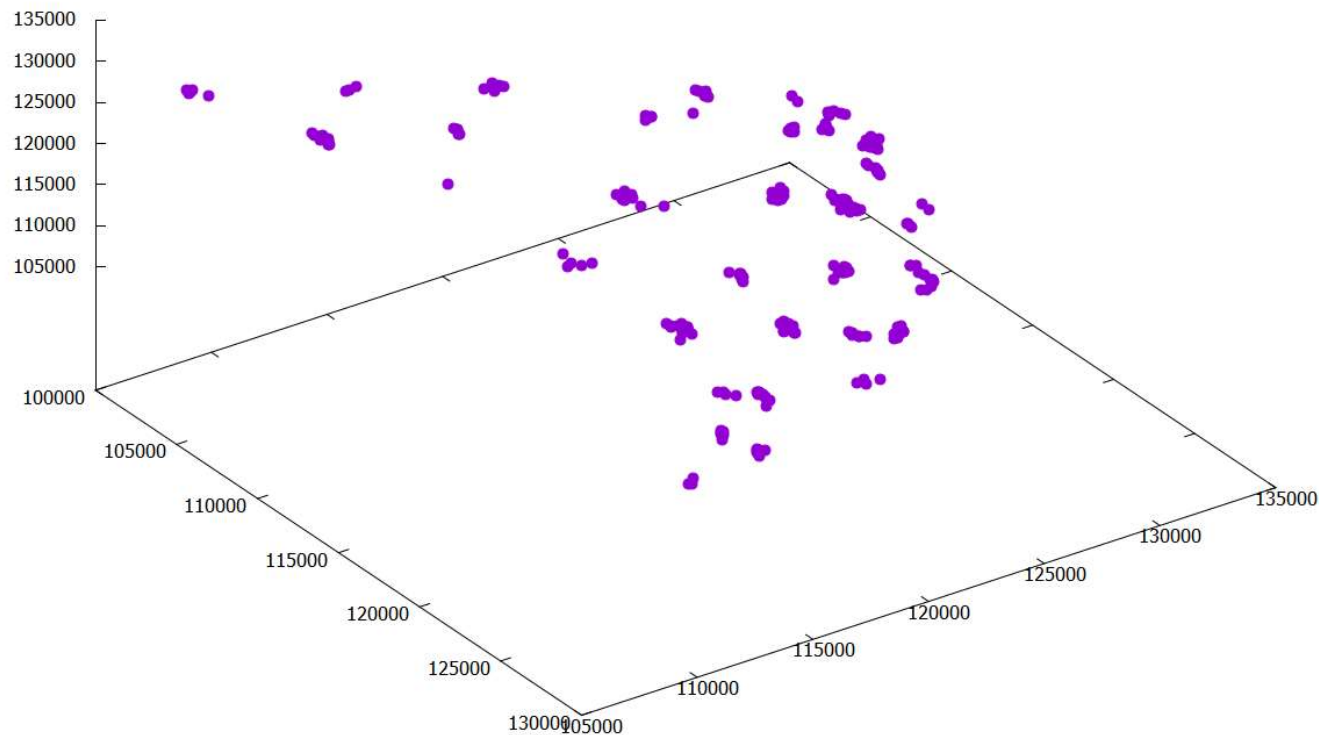
(Mavrotas, G., Florios, K., Figueira, J.R. (2015). An improved version of a core based algorithm for the multi-objective multi-dimensional knapsack problem: A computational study and comparison with meta-heuristics. *Applied Mathematics and Computation*, 270, 25-43)

Aproksymacja całego frontu Pareto może być wykorzystana w fazie „off-line” podejmowania decyzji (faza ujawniania preferencji), w której nie przeprowadza się już obliczeń optymalizacyjnych. Takie aproksymacje wyznaczają np. algorytmy ewolucyjne optymalizacji wielokryterialnej (np. NSGA-II).

Przykład numeryczny

Eksperyment 3, aproksymacja frontu Pareto

$f(S_L)$ •

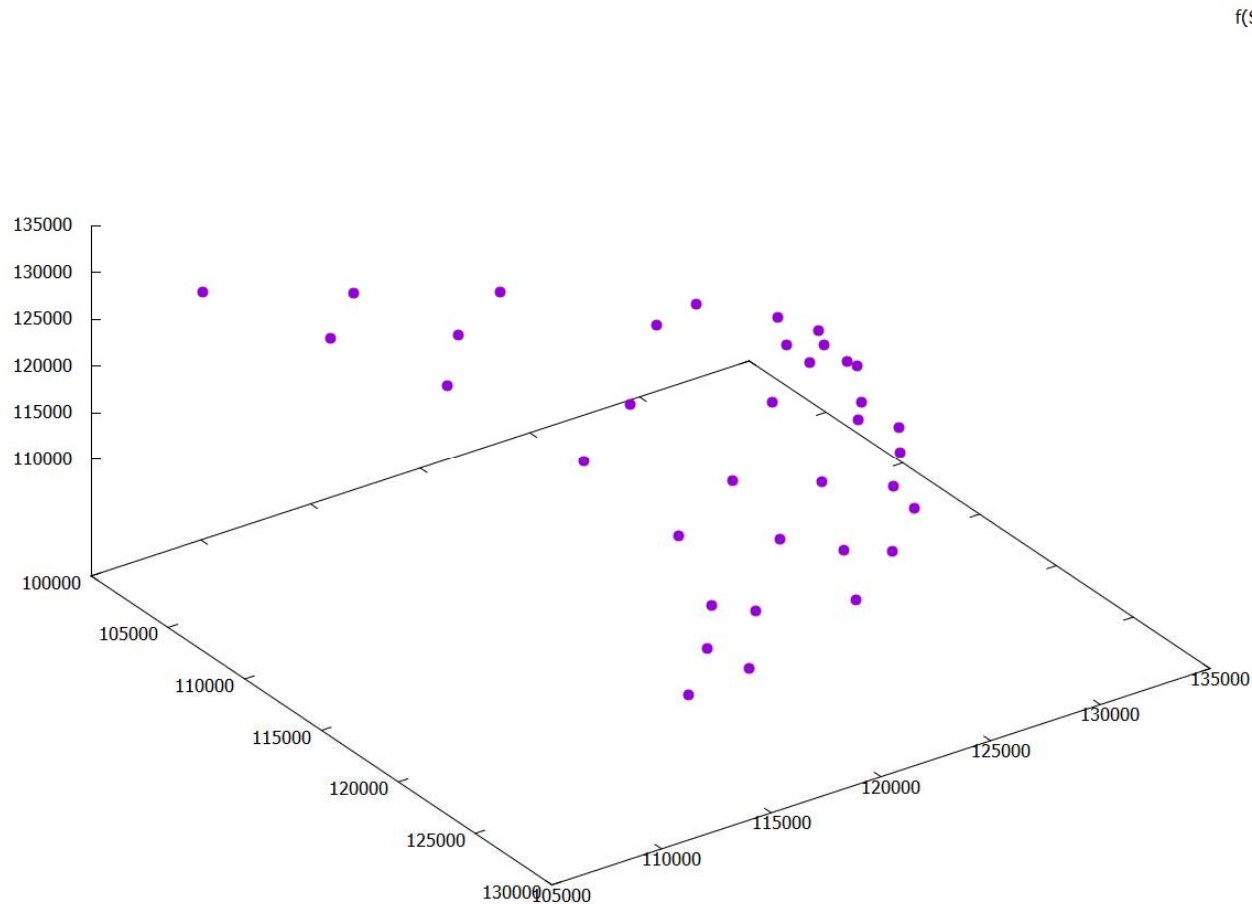


Wynikiem działania programu CoreMCBB jest szkielet dolny (250 elementów), którego obraz jest aproksymacją całego frontu Pareto. Czas obliczeń: **2.5 s!**

Jak daleko jest front Pareto?

Przykład numeryczny

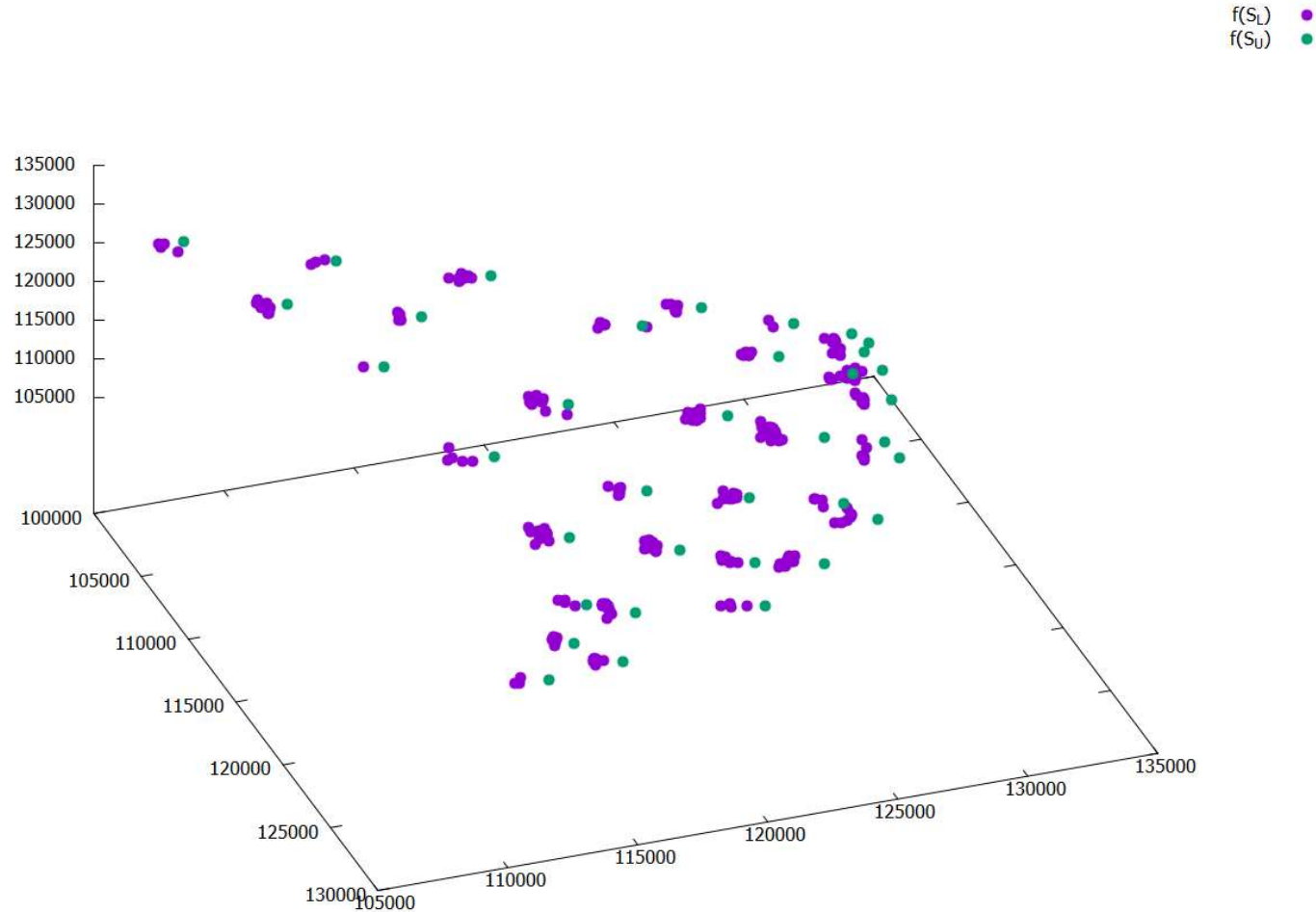
Eksperyment 3, „odzysk” szkieletu górnego z dziennika obliczeń



Obraz szkieletu górnego, który to szkielet (36. elementowy) wyznaczany jest w czasie działania programu CoreMCBB (relaksacja ciągła zadania skalarnego z sumą ważoną funkcji kryterialnych), a jego elementy wykorzystywane są do sterowania wyznaczeniem elementów aproksymacji frontu Pareto.

Przykład numeryczny

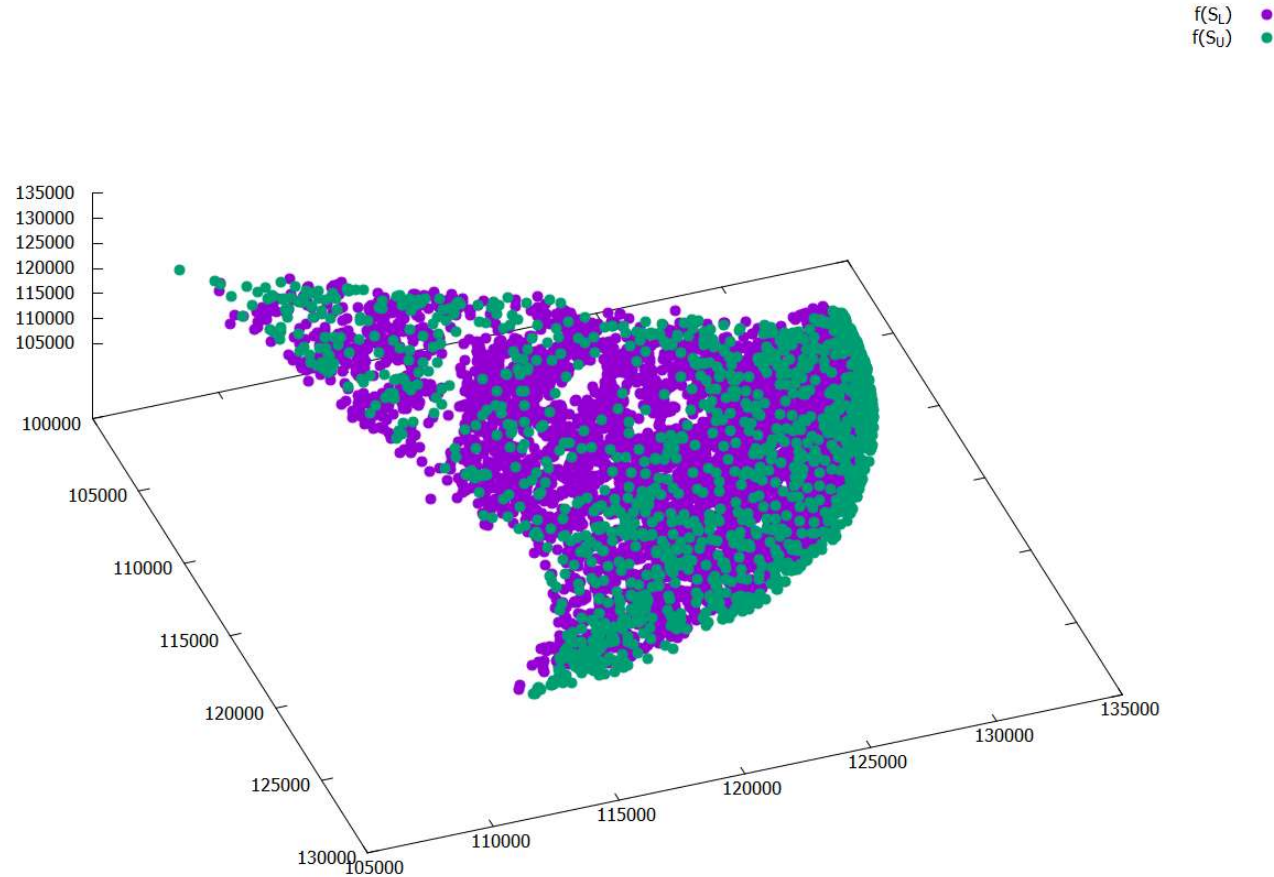
Eksperyment 3, obrazy szkieletu dolnego i górnego



Oba zbiory tworzą obrazy szkieletów dolnych i górnych, które mogą być użyte do wyznaczenia oszacowań współrzędnych ocen efektywnych zadanych wektorami λ .

Przykład numeryczny

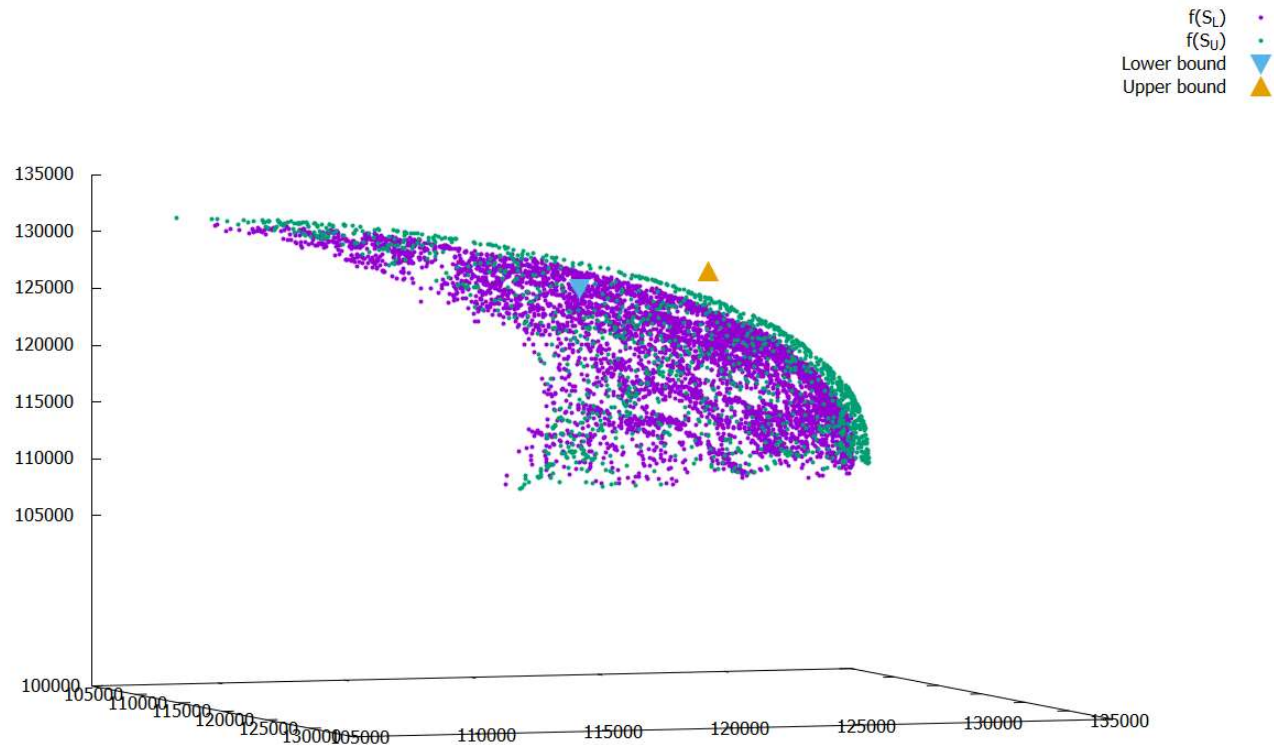
Eksperyment 4, obrazy szkieletu dolnego i górnego, liczniejsza reprezentacja



6056 elementów szkieletu dolnego, 1315 elementów szkieletu górnego. Czas obliczeń: **282 s.**

Przykład numeryczny

**Eksperyment 4 (cd.), oszacowania współrzędnej oceny efektywnej
zadanej wektorem $\lambda = (0.220, 0.222, 0.558)$**



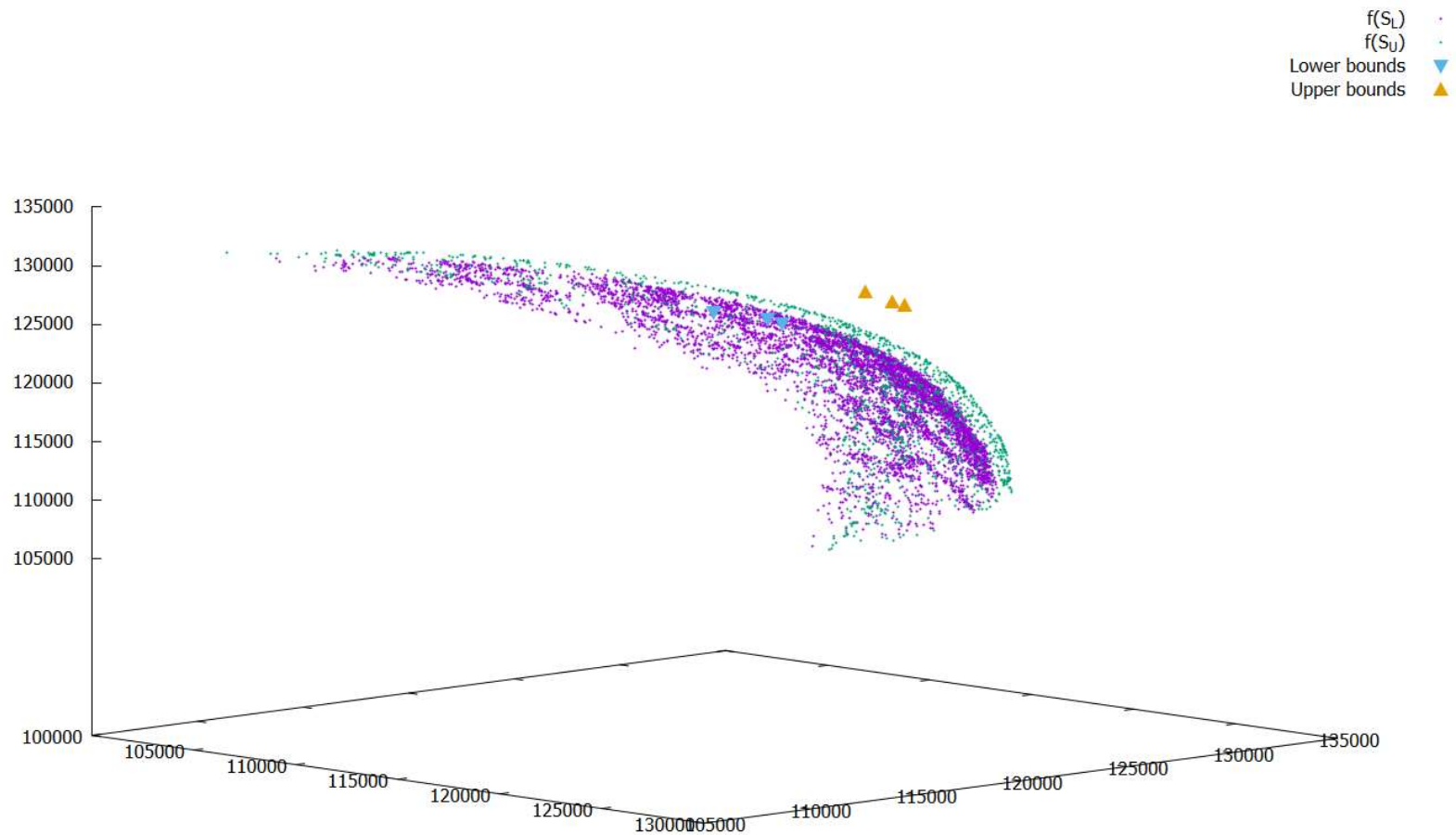
Interwałowa reprezentacja tej oceny efektywnej:

$$\mathbf{L} = [116331.448, 118669.640, 126767.444]$$

$$\mathbf{B} = [119703.458, 122563.729, 128473.478]$$

Przykład numeryczny


Eksperyment 4 (cd.), oszacowania współrzędnych ocen efektywnych dla trzech innych wektorów λ



Podsumowanie

- Naszym celem nie jest wyznaczanie dwustronnych (globalnych) aproksymacji całego frontu Pareto, jak to ma miejsce np. w metodach „Branch & Bound” dla całkowitoliczbowych problemów optymalizacji wielokryterialnej.
- Wykorzystujemy jednak pewne dwustronne, skończone reprezentacje frontu Pareto (szkielety dolne i górne) do obliczania interwałowej reprezentacji pojedynczej oceny efektywnej zadanej parametrycznie.
- Nasze dwustronne aproksymacje frontu Pareto mogą mieć charakter lokalny, w tym sensie, że zależą one od preferencji decydenta (jak w przykładzie z problemem Markowitz’a) – wyznaczamy takie szkielety dolne i takie szkielety górne, które są bazą dla oszacowań od dołu i od góry na wartości współrzędnych zadanej parametrycznie oceny efektywnej.

Podsumowanie

- Wykorzystując pewne techniczne, *nieużyteczne z punktu widzenia decydenta lub „ukryte w dzienniku optymalizatora”* informacje, których dostarczają optymalizatory MIP lub dedykowane do konkretnych typów problemów optymalizatory, można wyznaczać szkielety górne, będące nośnikami oszacowań od góry na wartości współrzędnych ocen efektywnych. 
- Elementy szkieletu górnego można także relatywnie szybko wyznaczać rozwiązując instancje zrelaksowanego problemu Czebyszewa.
- Interwałowe reprezentacje ocen efektywnych mogą być wykorzystywane w **systemach wspomaganie podejmowania decyzji**, opartych na interaktywnych metodach wielokryterialnego podejmowania decyzji.
- Możliwa jest poprawa jakości oszacowań, ale kosztem zwiększonego nakładu na obliczenia optymalizacyjne.

Dziękuję za zaproszenie i uwagę 😊

janusz.miroforidis@ibspan.waw.pl