Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

blisko

międzynarodowo

przez całe życie

Optymalny portfel inwestycyjny a reprezentacja preferencji inwestora

Renata Dudzińska-Baryła, Ewa Michalska

Katedra Badań Operacyjnych
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Metody i zastosowania badań operacyjnych – Będlewo, 24-26.10.2021

Plan prezentacji

- Wielokryterialny model wyboru portfela walorów
- Reprezentacja preferencji inwestora
- Eksperyment obliczeniowy
- Podsumowanie

Cel

Analiza parametrów i struktury portfeli optymalnych dla różnych sposobów reprezentowania preferencji względem trzech kryteriów (momentów rozkładu stóp zwrotu).

Wielokryterialny model wyboru portfela walorów

- Model Markowitza

$$\max(E_P)$$
$$\min(V_P)$$
$$\sum_{i \in I} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0, i \in I$$

gdzie:

x_i – udział *i*-tego waloru w portfelu

I – zbiór indeksów walorów

E_P – wartość oczekiwana stopy zwrotu portfela

V_p – wariancja stopy zwrotu portfela

Wielokryterialny model wyboru portfela walorów

- Model uwzględniający skośność wyrażoną trzecim momentem centralnym:

$$\max(E_P)$$
$$\min(V_P)$$
$$\max(S_P)$$
$$\sum_{i \in I} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0, i \in I$$

gdzie:

x_i – udział *i*-tego waloru w portfelu

I – zbiór indeksów walorów

E_P – wartość oczekiwana stopy zwrotu portfela

V_p – wariancja stopy zwrotu portfela

S_P – skośność stopy zwrotu portfela

Reprezentacja preferencji

Cele kierunkowe	Cele punktowe i przedziałowe
- Hierarchia kryteriów - Ważenie kryteriów	- Hierarchia odchyleń - Ważenie odchyleń

Reprezentacja preferencji inwestora względem (E_P, V_P, S_P)
Hierarchia kryteriów

Przykład - dla inwestora najważniejsza jest maksymalizacja wartości oczekiwanej, następnie minimalizacja wariancji, a najmniej ważna jest maksymalizacja skośności – reprezentacja preferencji: **(1, 2, 3)**

I poziom hierarchii:

$$\max(E_P)$$
$$\sum_{i \in I} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0$$

Opt. wartość f.celu E^*

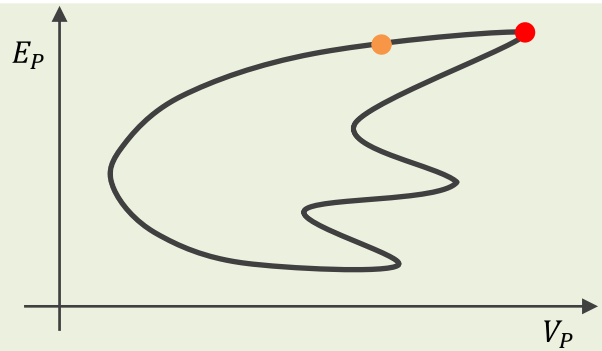
II poziom hierarchii:

$$\min(V_P)$$
$$\sum_{i \in I} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0$$
$$E_P = E^*$$

Opt. wartość f.celu V^*

III poziom hierarchii:

$$\max(S_P)$$
$$\sum_{i \in I} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0$$
$$E_P = E^*$$
$$V_P = V^*$$



Reprezentacja preferencji inwestora względem (E_P, V_P, S_P)
Hierarchia kryteriów

Przykład - dla inwestora najważniejsza jest minimalizacja wariancji, następnie maksymalizacja wartości oczekiwanej, a najmniej ważna jest maksymalizacja skośności – reprezentacja preferencji: **(2, 1, 3)**

I poziom hierarchii:

$$\min(V_P)$$
$$\sum_{i \in I} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0$$

Opt. wartość f.celu V^*

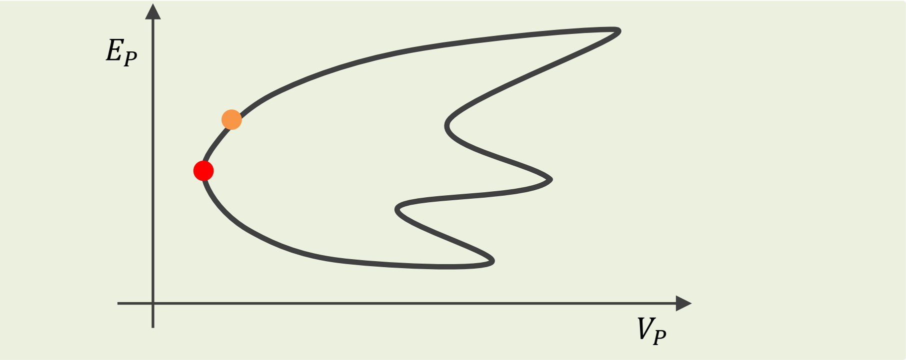
II poziom hierarchii:

$$\max(E_P)$$
$$\sum_{i \in I} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0$$
$$V_P = V^*$$

Opt. wartość f.celu E^*

III poziom hierarchii:

$$\max(S_P)$$
$$\sum_{i \in I} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0$$
$$V_P = V^*$$
$$E_P = E^*$$



Cele punktowe i przedziałowe

- Bilansowanie celów:

$$E_P + de^- - de^+ = E_0$$
$$V_P + dv^- - dv^+ = V_0$$
$$S_P + ds^- - ds^+ = S_0$$
$$de^-, de^+, dv^-, dv^+, ds^-, ds^+ \geq 0$$

Skrócony zapis:
$d \geq 0$

- Niepożądane odchylenia od celów:

$$E_P + \boldsymbol{de^-} - de^+ = E_0$$
$$V_P + dv^- - \boldsymbol{dv^+} = V_0$$
$$S_P + \boldsymbol{ds^-} - ds^+ = S_0$$

- Jeżeli pożądane wartości celów będą na poziomie:
  E_0 - największa wartość oczekiwana (spośród wszystkich walorów),
  V_0 - wariancja globalnego portfela minimalnego ryzyka,
  S_0 - największa wartość skośności (spośród wszystkich walorów)

  to odchylenia de^+, dv^-, ds^+ można pominąć.

Reprezentacja preferencji inwestora względem (E_P, V_P, S_P)
Hierarchia odchyleń

Przykład - dla inwestora najważniejsza jest maksymalizacja wartości oczekiwanej, następnie minimalizacja wariancji, a najmniej ważna jest maksymalizacja skośności – reprezentacja preferencji: **(1, 2, 3)**

I poziom hierarchii:

$$\min(de^-)$$
$$E_P + de^- - de^+ = E_0$$
$$V_P + dv^- - dv^+ = V_0$$
$$S_P + ds^- - ds^+ = S_0$$
$$\sum_{i \in I} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0, d \geq 0$$

Opt. wartość f.celu de^*

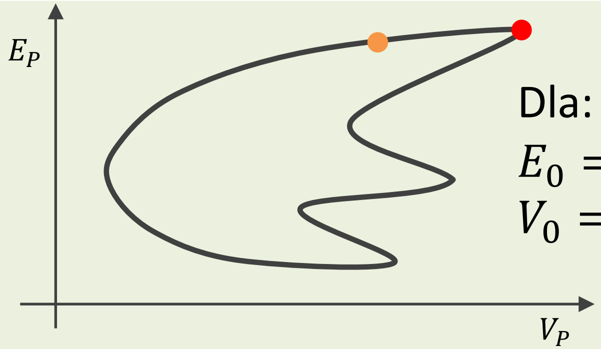
II poziom hierarchii:

$$\min(dv^+)$$
$$E_P + de^- - de^+ = E_0$$
$$V_P + dv^- - dv^+ = V_0$$
$$S_P + ds^- - ds^+ = S_0$$
$$\sum_{i \in I} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0, d \geq 0$$
$$de^- = de^*$$

Opt. wartość f.celu dv^*

III poziom hierarchii:

$$\min(ds^-)$$
$$E_P + de^- - de^+ = E_0$$
$$V_P + dv^- - dv^+ = V_0$$
$$S_P + ds^- - ds^+ = S_0$$
$$\sum_{i \in I} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0, d \geq 0$$
$$de^- = de^*$$
$$dv^+ = dv^*$$



Dla:

$E_0 = \max(E_P)$

$V_0 = \min(V_P)$

Reprezentacja preferencji inwestora względem (E_P, V_P, S_P)
Hierarchia odchyleń

Przykład - dla inwestora najważniejsza jest minimalizacja wariancji, następnie maksymalizacja wartości oczekiwanej, a najmniej ważna jest maksymalizacja skośności – reprezentacja preferencji: **(2, 1, 3)**

I poziom hierarchii:

$$\min(dv^+)$$
$$E_P + de^- - de^+ = E_0$$
$$V_P + dv^- - dv^+ = V_0$$
$$S_P + ds^- - ds^+ = S_0$$
$$\sum_{i \in I} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0, d \geq 0$$

Opt. wartość f.celu dv^*

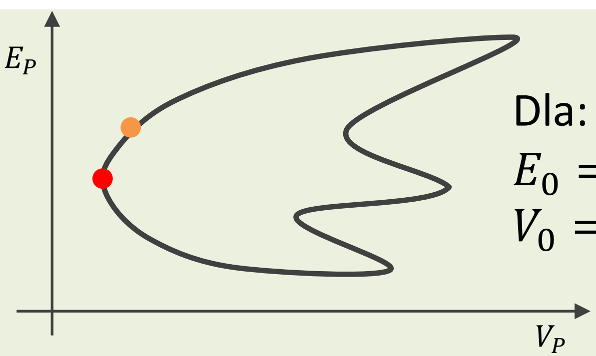
II poziom hierarchii:

$$\min(de^-)$$
$$E_P + de^- - de^+ = E_0$$
$$V_P + dv^- - dv^+ = V_0$$
$$S_P + ds^- - ds^+ = S_0$$
$$\sum_{i \in I} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0, d \geq 0$$
$$dv^+ = dv^*$$

Opt. wartość f.celu de^*

III poziom hierarchii:

$$\min(ds^-)$$
$$E_P + de^- - de^+ = E_0$$
$$V_P + dv^- - dv^+ = V_0$$
$$S_P + ds^- - ds^+ = S_0$$
$$\sum_{i \in I} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0, d \geq 0$$
$$dv^+ = dv^*$$
$$de^- = de^*$$



Dla:

$$E_0 = \max(E_P)$$
$$V_0 = \min(V_P)$$

Model programowania celowego wyboru portfela

- Minimalizacja funkcji odchyleń parametrów rozkładu od pożądanych wartości średniej (E_0), wariancji (V_0) i skośności (S_0):

$$\min \ (z(d))$$
$$E_P + de^- - de^+ = E_0$$
$$V_P + dv^- - dv^+ = V_0$$
$$S_P + ds^- - ds^+ = S_0$$
$$\sum_{i \in I} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0, d \geq 0$$

- Liniowa funkcja względnych odchyleń:

$$z(d) = \alpha \frac{de^-}{|E_0|} + \beta \frac{dv^+}{V_o} + \gamma \frac{ds^-}{|S_0|} \qquad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

- Wielomianowa funkcja względnych odchyleń:

$$z(d) = \left(\frac{de^-}{|E_0|}\right)^\alpha + \left(\frac{dv^+}{V_o}\right)^\beta + \left(\frac{ds^-}{|S_0|}\right)^\gamma$$

α, β, γ są rangami
„1” - najważniejsze

Trójka (α, β, γ) odzwierciedla strukturę preferencji decydenta względem parametrów rozkładu (E_0, V_0, S_0).

Reprezentacja preferencji inwestora względem (E_P, V_P, S_P)
Programowanie celowe

Przykład: $E_P \succ V_P \succ S_P$

Dla wielomianowej funkcji względnych odchyleń – rangi:	Dla liniowej funkcji względnych odchyleń – wagi:
(1; 2; 3)	(0,7; 0,2; 0,1) (0,6; 0,3; 0,1) (0,5; 0,4; 0,1) (0,5; 0,3; 0,2)

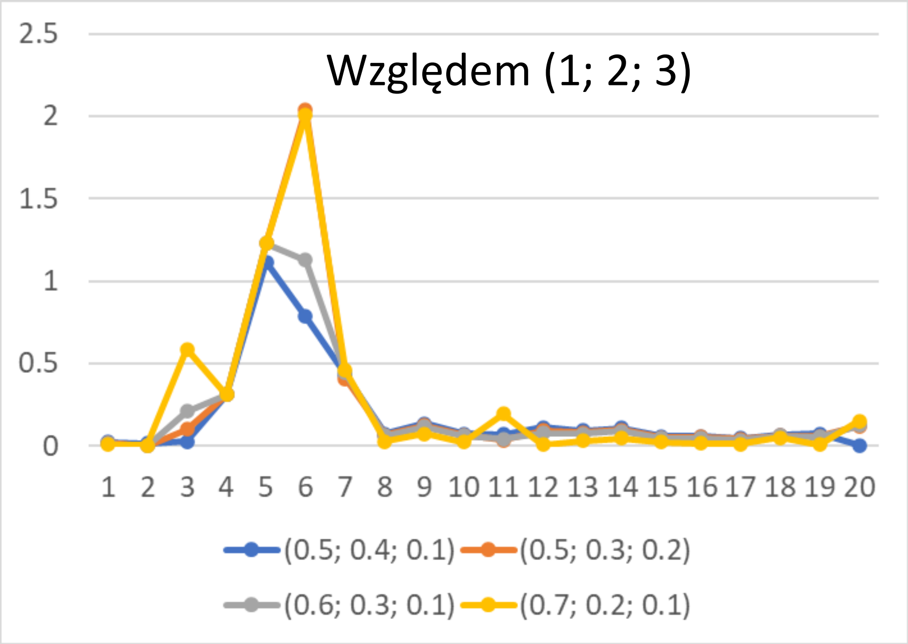
Analogicznie dla rang (1; 3; 2), (2; 1; 3), (3; 1; 2), (2; 3; 1), (3; 2; 1)

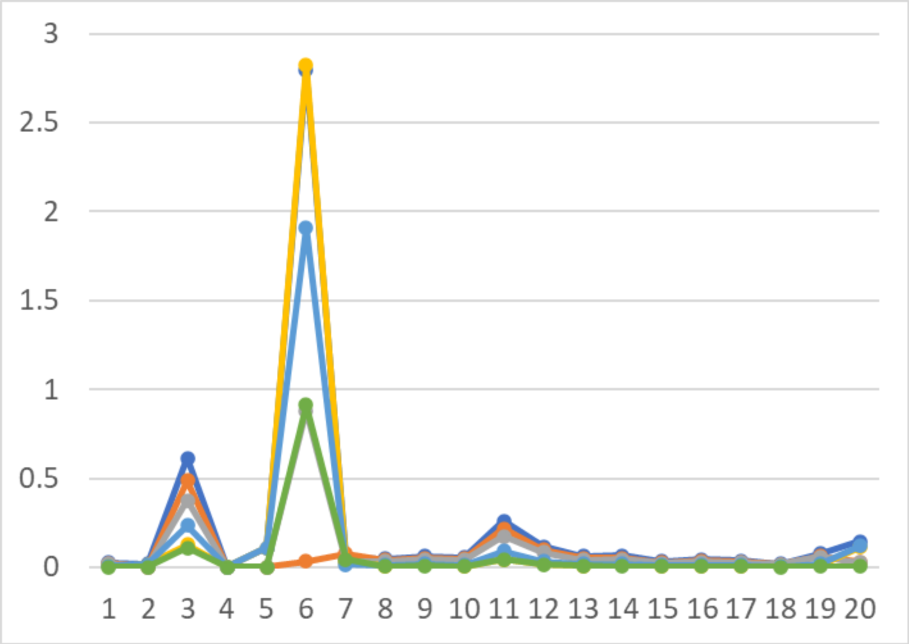
Badanie empiryczne

- Cel: analiza struktury i parametrów portfeli optymalnych przy uwzględnieniu trzech momentów rozkładu stóp zwrotu dla różnych sposobów reprezentowania preferencji.
- Potencjalne składniki portfeli zostały wybrane z różnych niezależnych rynków: kryptowaluty (BITCOIN notowany na BitStamp), towary (ZŁOTO, ROPA), giełda amerykańska (indeks DJIA), giełda polska (indeks WIG).
- Notowania z okresu od października 2019 do lipca 2021 (20 trzymiesięcznych podokresów) pochodzą z serwisu www.biznesradar.pl.
- Portfele optymalne wyznaczano na każdy pierwszy dzień miesiąca na podstawie notowań z trzech poprzedzających miesięcy.
- Narzędzie: solver NLP w programie SAS z opcją multistartu.

Preferencje $E_P \succ V_P \succ S_P$

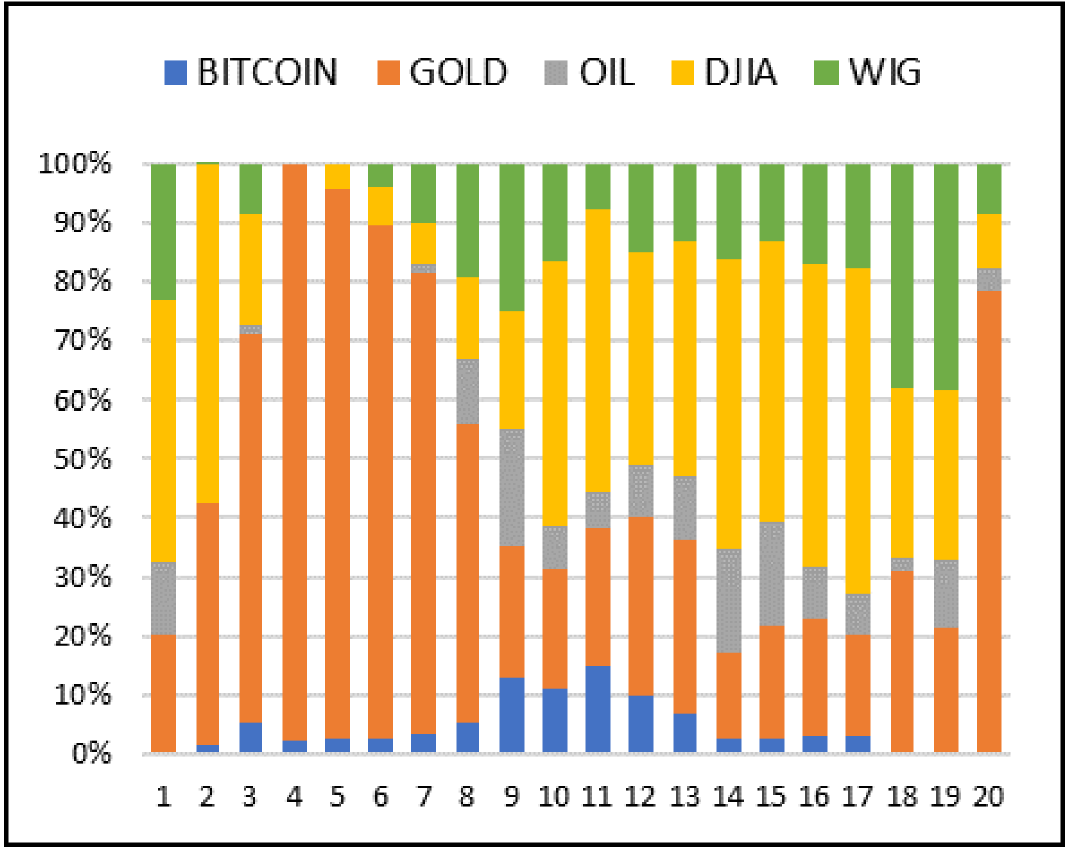
Porównanie rozwiązań optymalnych w przestrzeni kryterialnej – metryka euklidesowa



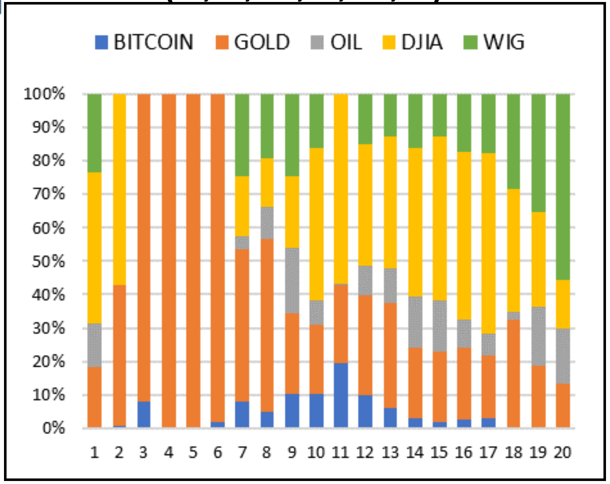


Porównanie parametrów portfeli przy różnych reprezentacjach preferencji (za pomocą rang i za pomocą wag).

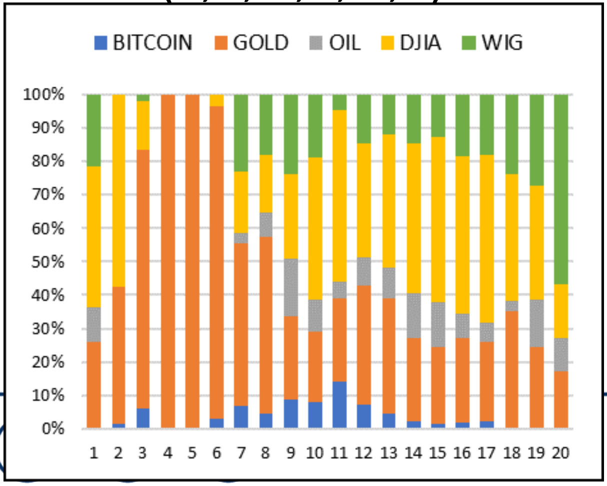
Preferencje $E_P \succ V_P \succ S_P$



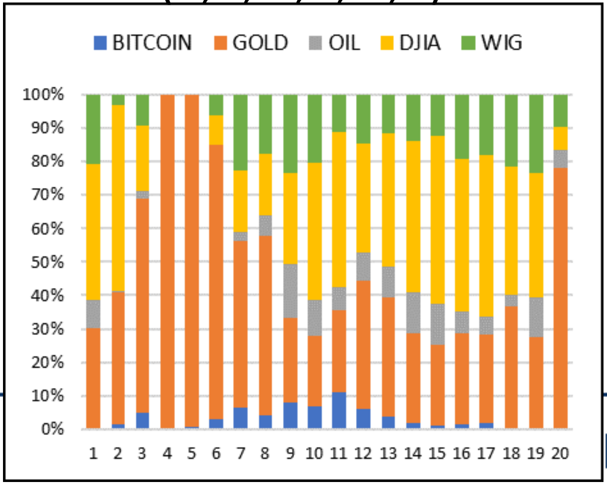
(0,7; 0,2; 0,1)



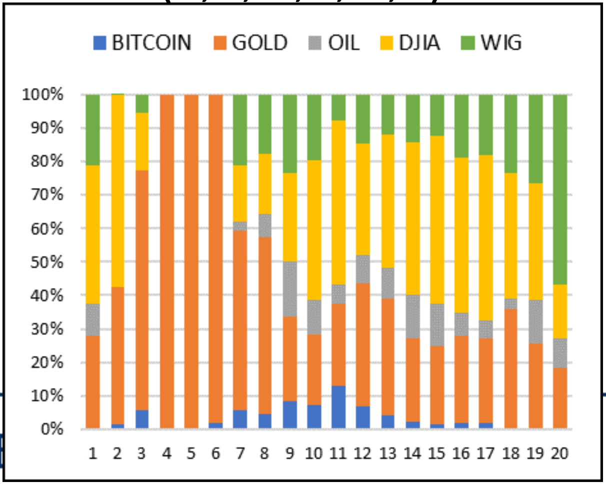
(0,6; 0,3; 0,1)



(0,5; 0,4; 0,1)



(0,5; 0,3; 0,2)

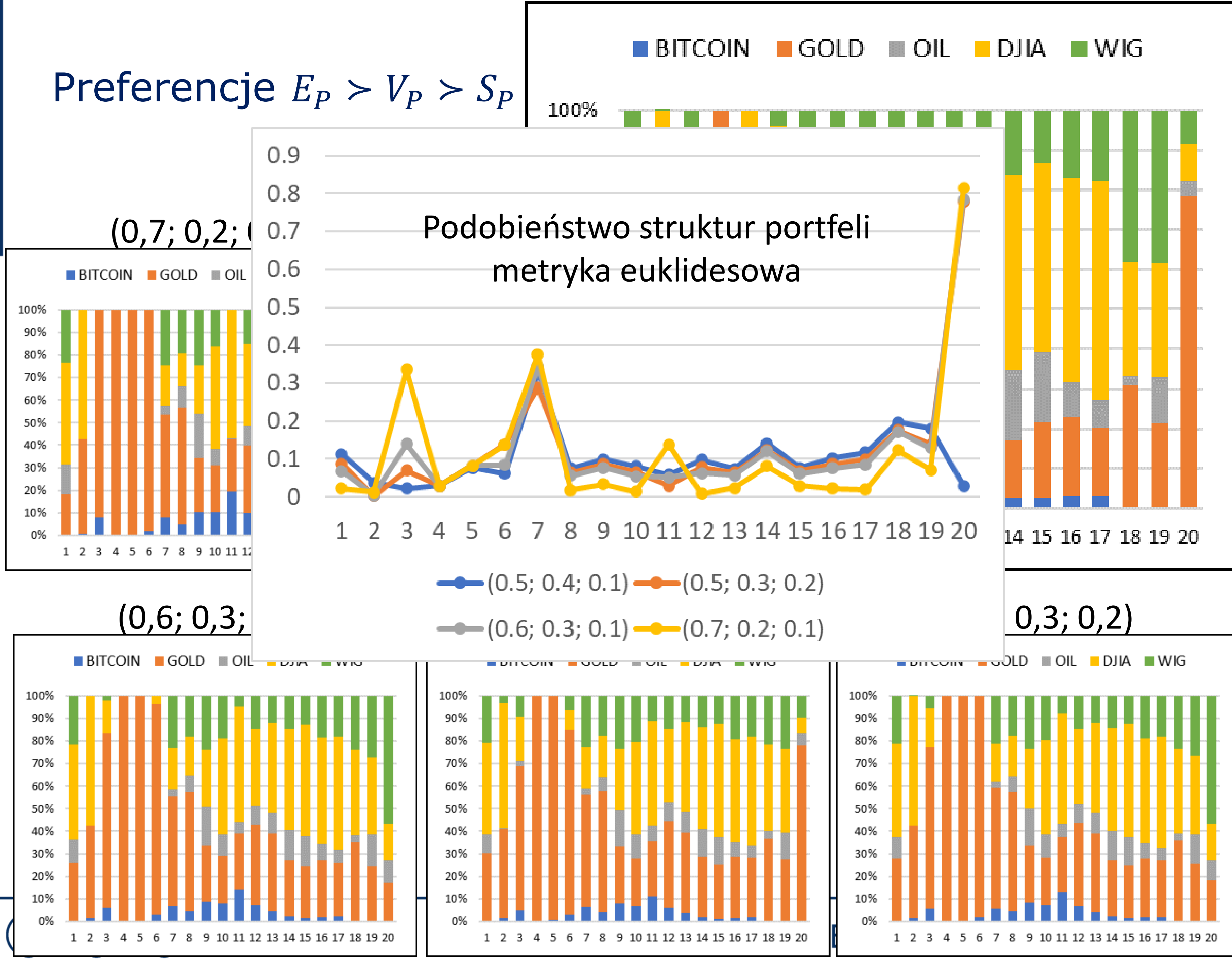


Preferencje $E_P \succ V_P \succ S_P$

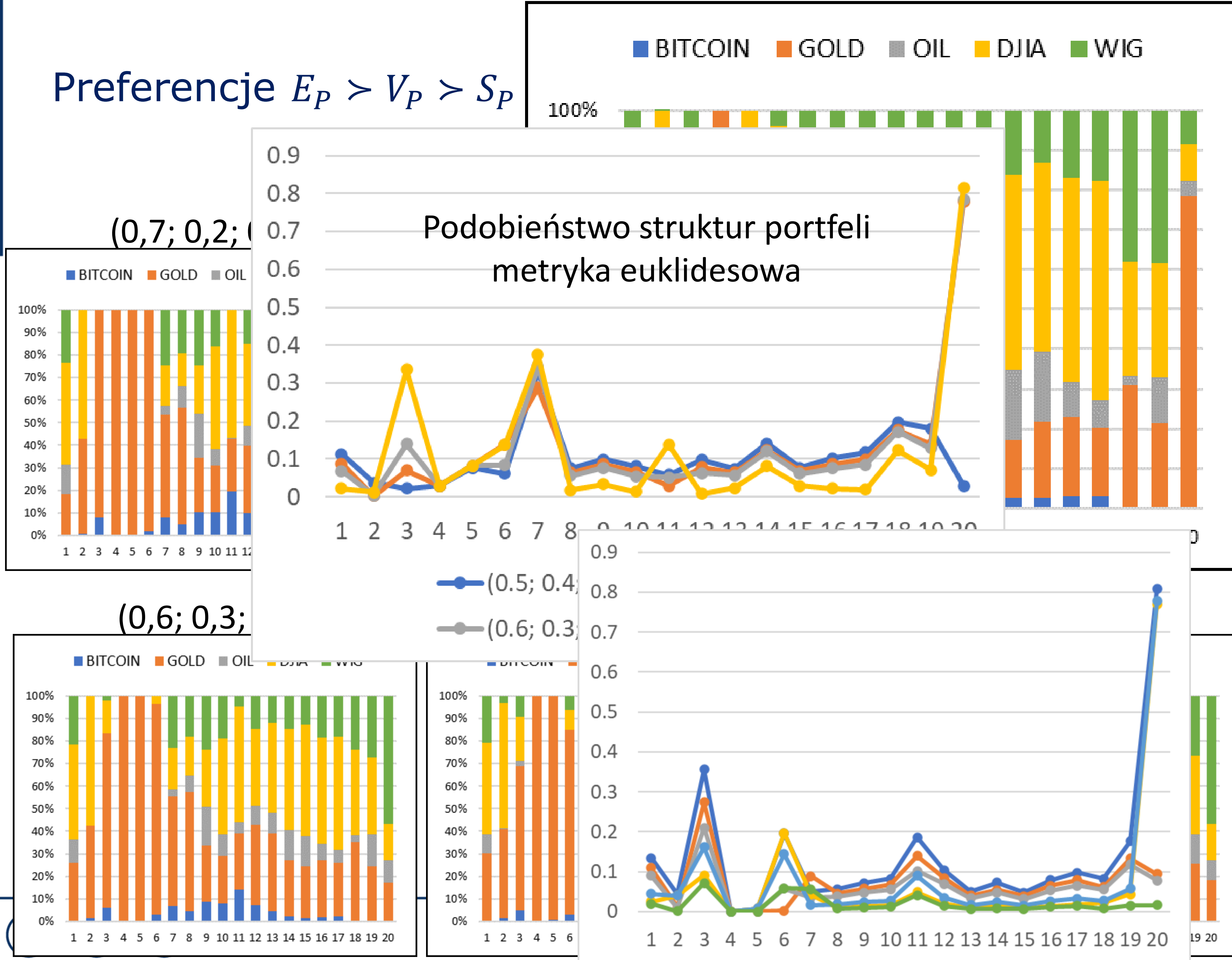
(0,7; 0,2; (

(0,6; 0,3;

0,3; 0,2)

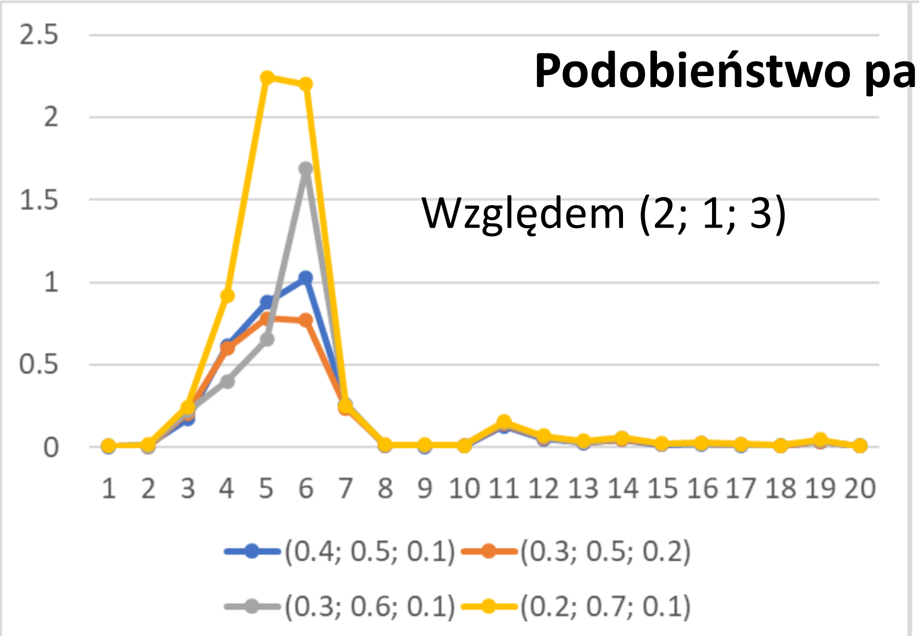


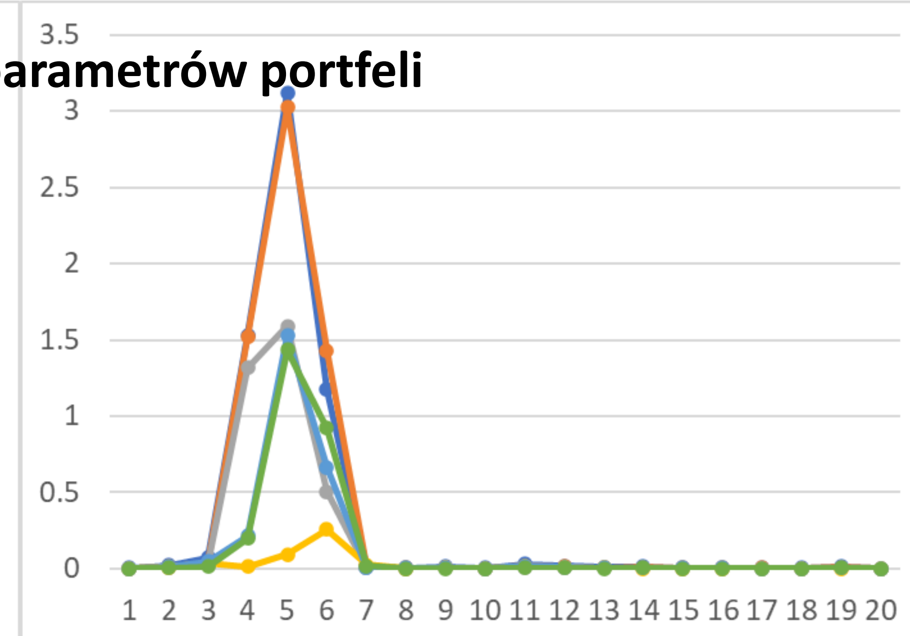
Preferencje $E_P \succ V_P \succ S_P$



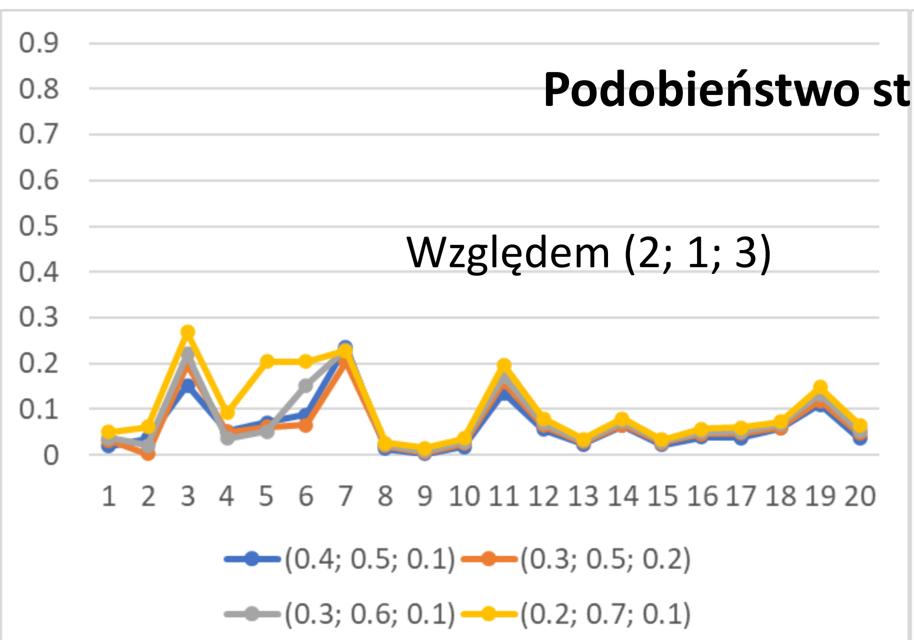
Preferencje $V_P \succ E_P \succ S_P$

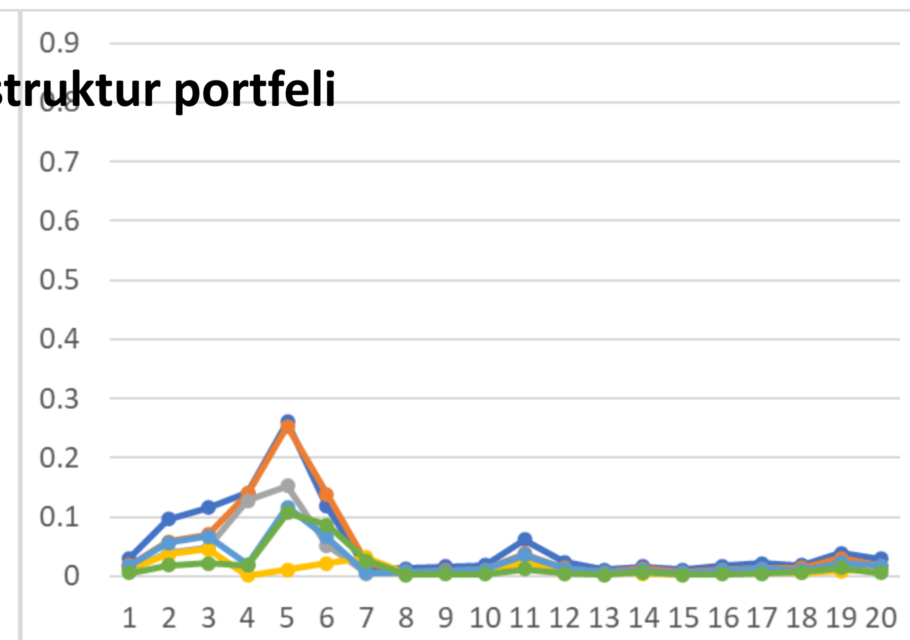
Podobieństwo parametrów portfeli



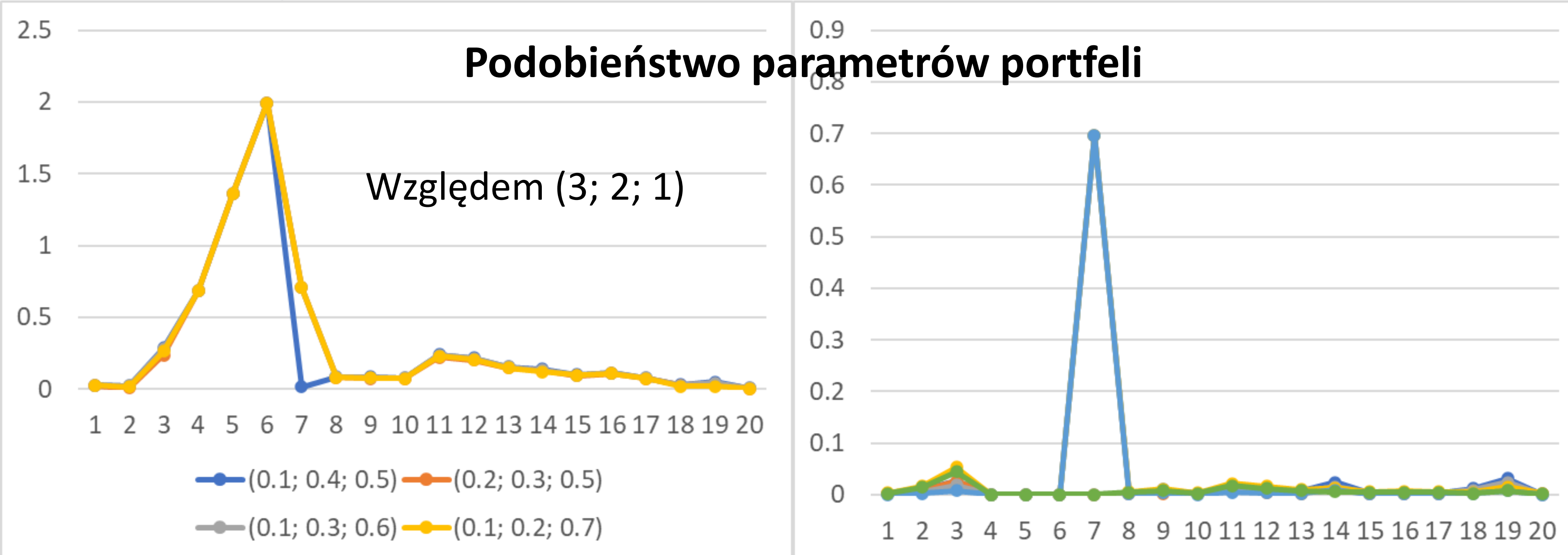


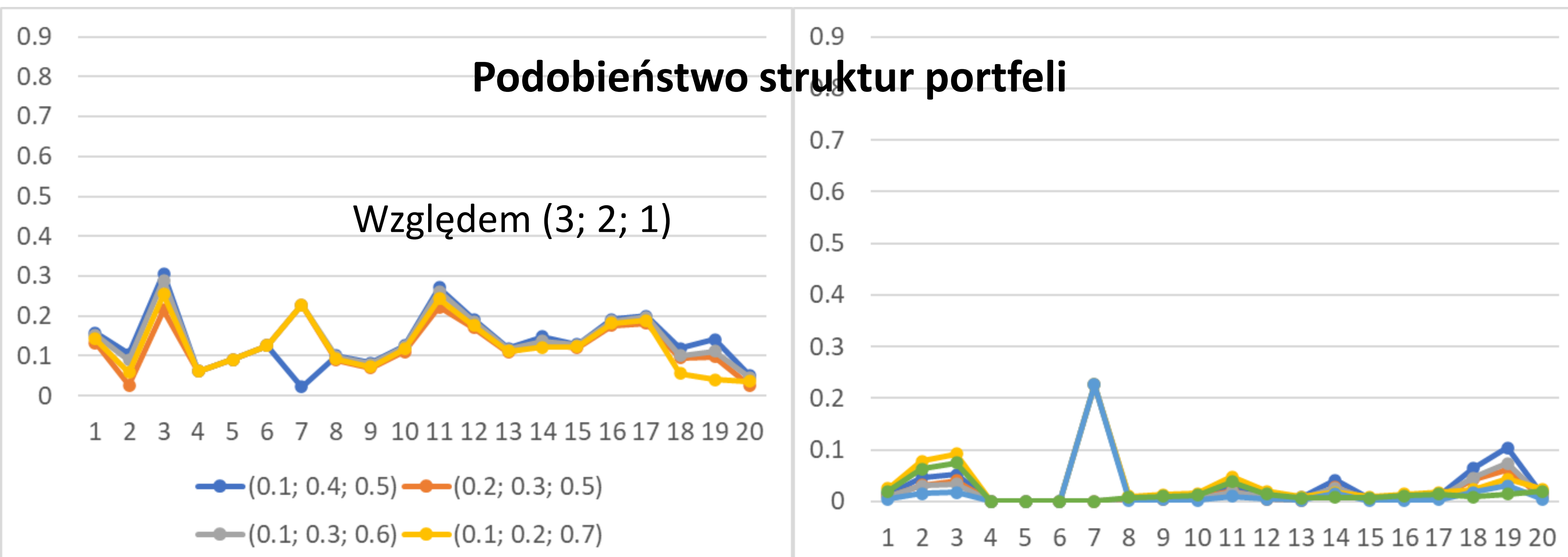
Podobieństwo struktur portfeli





Preferencje $S_P \succ V_P \succ E_P$





Podsumowanie

- Wykorzystanie podejścia z hierarchią kryteriów lub hierarchią odchyleń daje przewidywalne wyniki.
- Wybór modelu i sposobu reprezentowania preferencji wpływa na strukturę i parametry portfeli optymalnych.
- Różnice w strukturach portfeli optymalnych dla różnych reprezentacji preferencji nie muszą pociągać różnic w parametrach tych portfeli.
- W okresach strachu i niepewności (okres szoku i I fali koronawirusa – portfele 4, 5, 6), kiedy emocje górują nad racjonalnością złoto jest bezpieczną inwestycją.
- Mit kryptowaluty jako bezpiecznej przystani został obalony.
- Inwestycje na rynku zagranicznym (USA) są atrakcyjniejsze od inwestycji na rynku krajowym.